

Лекции
 по **Математичен анализ II част**

Увод:

☞ **Производни и интеграли**

☞ **Зад. 1:** $J = \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$

Решение: представяме

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{a+x} = \frac{A(a+x) + B(a-x)}{a^2 - x^2} = \frac{(A+B)a + (A-B)x}{a^2 - x^2},$$

откъдето следва

$$\begin{cases} (A+B)a = 1 \\ A-B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2Aa = 1 \\ B = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2a \\ B = A \end{cases}.$$

Така интегралът добива вида

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{a+x} + \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{a-x} = \frac{1}{2a} \int \frac{d(x+a)}{a+x} - \frac{1}{2a} \int \frac{d(-x+a)}{a-x} = \\ &= \frac{1}{2a} \ln |a+x| - \frac{1}{2a} \ln |a-x| = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|. \end{aligned}$$

☞ **Интегриране по части:** $\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x)$

☞ **Зад. 2:** $J = \int \ln(x^2 - 1) dx = ?$

Решение: $J = \int \ln(x^2 - 1) dx = x \cdot \ln(x^2 - 1) - \int x d \ln(x^2 - 1) =$

$$= x \cdot \ln(x^2 - 1) - \int x \frac{1}{x^2 - 1} \cdot 2x dx = x \cdot \ln(x^2 - 1) - 2 \int \frac{x^2}{x^2 - 1} dx = x \cdot \ln(x^2 - 1) - 2 \int \frac{x^2 - 1 + 1}{x^2 - 1} dx =$$

$$= x \cdot \ln(x^2 - 1) - 2 \int \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} dx - 2 \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = x \cdot \ln(x^2 - 1) - 2 \int dx - 2J(x).$$

И така

$$(1) \quad J = \int \ln(x^2 - 1) dx = x \cdot \ln(x^2 - 1) - 2x - 2J(x).$$

Решаваме отделно интеграла

$$(2) \quad J_1(x) = \int \frac{1}{x^2 - 1} dx.$$

За неговото решаване най-напред представяме (разлагаме) подинтегралната му функция:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} \stackrel{\exists A, B}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)}{(x-1)} + \frac{B(x-1)}{(x+1)} = \frac{(A+B)x + (A-B)}{(x-1)(x+1)}.$$

Очевидно трябва $(A+B) = 0 \cap (A-B) = 0, \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$, при което

$$(3) \quad \frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right).$$

Заместваме (3) в (2), и получаваме

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \int \frac{1}{x^2-1} dx = \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{d(x+1)}{x+1} = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|, \end{aligned}$$

където е използван табличният интеграл $\int \frac{du}{u} = \ln|u|$.

И така доказахме, че

$$(4) \quad \boxed{J_1(x) = \int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|}$$

Заместваме така получената стойност на интеграла $J_1(x)$ в (1) и получаваме

$$\begin{aligned} (5) \quad J &= \int \ln(x^2-1) dx = x \cdot \ln(x^2-1) - 2x - 2 \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \\ &= x \cdot \ln(x^2-1) - 2x - \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \end{aligned}$$

Въпрос 1. Интегриране чрез смяна на променливите

Въпрос 2. Интегриране на рационални функции

а) за рационални функции от I вид: $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$.

$$\Rightarrow \text{При } \boxed{\alpha=1}: \int \frac{A}{x-a} d(x-a) = A \cdot \ln|x-a| + C$$

$$\Rightarrow \text{При } \boxed{\alpha > 1}: \int \frac{A}{(x-a)^\alpha} dx = A \cdot \int (x-a)^{-\alpha} d(x-a) = \frac{A}{-\alpha+1} (x-a)^{-\alpha+1} + C.$$

б) за рационални функции от II вид: те участват в интегралите, съдържащи в знаменателя на подинтегралната си функция квадратен тричлен $x^2 + p \cdot x + q$, **непритежаващ реални корени**, т.е. $D = p^2 - 4q < 0$. Разновидност на интегралите от II вид са и интегралите, чиято подинтегрална функция има вид $\frac{M \cdot x + N}{x^2 + p \cdot x + q}$ на правилна дроб, неприводима към I вид.

➤ Интегралите от II вид се решават, като в тях се прави **субституция на**

Хорнер: $x = t - \frac{p}{2}$.

$$\Rightarrow \text{Пример 1: } J(x) = \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 4}, \quad D < 0.$$

Решение: Полагаме $x = t - \frac{p}{2} \equiv t - \frac{(-3)}{2} = t + \frac{3}{2}$, като очевидно $dx = dt$.

Квадратният тричлен в знаменателя ще се представи така:

$$\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(t + \frac{3}{2}\right) + 4 = t^2 + 2t \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - 3t - 3 \cdot \frac{3}{2} + 4 = t^2 + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 4 = t^2 + \frac{7}{4}.$$

След заместване в интеграла получаваме

$$J(x) = \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 4} = \int \frac{dt}{t^2 + \frac{7}{4}} = \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}.$$

Ако използваме табличния интеграл $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$, получаваме

$$\int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{7}} + C,$$

откъдето, използвайки, че по полагане $x = t + \frac{3}{2}$, т.е. $t = x - \frac{3}{2}$, получаваме окончателно

$$J(x) = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{7}} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{7}} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x - 3}{\sqrt{7}} + C.$$

☞ **Пример 2:** $J = \int \frac{2x - 3}{x^2 + 3x + 3} dx$, $D = 9 - 12 < 0$.

Решение: Полагаме $x = t - \frac{p}{2} \equiv t - \frac{3}{2}$, като очевидно $dx = dt$. При тази субституция подинтегралната функция ще се представи във вида:

$$\frac{2x - 3}{x^2 + 3x + 3} = \frac{2\left(t - \frac{3}{2}\right) - 3}{\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(t - \frac{3}{2}\right) + 3} = \frac{2t - 6}{t^2 - 2t \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + 3t - \frac{9}{2} + 3} = \frac{2t - 6}{t^2 + \frac{3}{4}}.$$

След заместване в интеграла получаваме

$$J(x) = \int \frac{2t - 6}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = 2 \int \frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} dt - 6 \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = 2 \int \frac{d\left(\frac{1}{2}t^2\right)}{t^2 + \frac{3}{4}} - 6 \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$\int \frac{d\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)}{t^2 + \frac{3}{4}} - 6 \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \ln \left| t^2 + \frac{3}{4} \right| - 6 \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} + C =$$

$$= \ln \left| t^2 + \frac{3}{4} \right| - \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + C,$$

където отново е използван табличния интеграл $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$,

След възстановяване на променливата „x” от полагането, т.е. $t = x + \frac{3}{2}$,
получаваме окончателно

$$J(x) = \ln \left| \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right| - \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2 \left(x + \frac{3}{2} \right)}{\sqrt{3}} + C = \ln |x^2 + 3x + 3| - \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x + 3}{\sqrt{3}} + C$$

2. Разлагане на правилна дроб на сбор от елементарни дроби (от I и II вид).

☞ **Пример:** $J(x) = \int \frac{x}{x^3 - 1} dx$.

Решение: разлагаме подинтегралната функция на дроби

$$\frac{x}{x^3 - 1} \equiv \frac{x}{(x-1)(x^2 + x + 1)} \stackrel{\text{Теорема}}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{Mx + N}{x^2 + x + 1},$$

където дискриминантата на квадратния член в знаменателя е $D = 1 - 4 < 0$. След привеждане към общ знаменател в дясната страна, получаваме

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{A(x^2 + x + 1) + (Mx + N)(x - 1)}{x^3 - 1}, \text{ или още}$$

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{Ax^2 + Ax + A + Mx^2 + Nx - Mx - N}{x^3 - 1}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 0}{x^3 - 1} = \frac{(A + M)x^2 + (A + N - M)x + (A - N)}{x^3 - 1},$$

откъдето

$$\begin{cases} A + M = 0 \\ A + N - M = 1, \\ A - N = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M = -A \\ A + (A) - (-A) = 1, \\ N = A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M = -1/3 \\ A = 1/3 \\ N = 1/3 \end{cases}.$$

Така получаваме

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx + N}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}(x-1)}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \frac{x-1}{x^2 + x + 1}.$$

Тогава

$$\begin{aligned} J(x) &= \int \frac{x}{x^3 - 1} dx = \int \left(\frac{1}{3} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \frac{x-1}{x^2 + x + 1} \right) dx = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int \frac{x-1}{x^2 + x + 1} dx = \\ &= \frac{1}{3} \ln |x-1| - \frac{1}{3} \cdot J_1(x), \text{ т.е.} \end{aligned}$$

$$(6) \quad J(x) = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \cdot J_1(x)$$

където за интеграла $J_1(x) = \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx$ прилагаме субституцията на Хорнер:

$x = t - \frac{1}{2}$, и следователно подинтегралната му функция става

$$\frac{x-1}{x^2+x+1} = \frac{t - \frac{1}{2} - 1}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right) + 1} = \frac{t - \frac{3}{2}}{t^2 - t + \frac{1}{4} + t - \frac{1}{2} + 1} = \frac{t - \frac{3}{2}}{t^2 + \frac{3}{4}} = \frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} - \frac{3}{2} \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}}.$$

Така за интеграла $J_1(x)$ получаваме

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx = \int \left[\frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} - \frac{3}{2} \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}} \right] dt = \int \frac{t dt}{t^2 + \frac{3}{4}} - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt^2}{t^2 + \frac{3}{4}} - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)}{t^2 + \frac{3}{4}} - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| t^2 + \frac{3}{4} \right| - \frac{3}{2} \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} + C = \frac{1}{2} \ln \left| t^2 + \frac{3}{4} \right| - \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

И така

$$J_1(x) = \frac{1}{2} \ln \left| t^2 + \frac{3}{4} \right| - \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + C \equiv \frac{1}{2} \ln \left| t^2 + \frac{3}{4} \right| - \sqrt{3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + C$$

Възстановяваме променливата „x” от полагането: $t = x + \frac{1}{2}$, откъдето

$$J_1(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right| - \sqrt{3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + C, \text{ т.е.}$$

$$(7) \quad J_1(x) = \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| - \sqrt{3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Накрая заместяваме $J_1(x)$ от (7) в (6) и получаваме окончателно

$$\begin{aligned} J(x) &= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \cdot J_1(x) = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| - \sqrt{3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \right] = \\ &= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln|x^2+x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C'. \end{aligned}$$

☒ **За дом. работа:** зад. 1. $J = \int \frac{32x}{(2x-1)(4x^2-16x+15)} dx = ?$.

Решение: най-напред представяме подинтегралната функция като сбор от дробно-рационални функции от I вид.

Преди това нека разложим квадратния тричлен $4x^2 - 16x + 15$ в знаменателя на прости (линейни) множители. Дискриминантата му е

$$D = 16^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15 = 16^2 - 16 \cdot 15 = 16 \cdot (16 - 15) \equiv 16 = 4^2,$$

следователно корените му са $x_{1,2} = \frac{16 \pm 4}{2 \cdot 4}$, т.е. $x_1 = \frac{16+4}{8} = \frac{5}{2}$ и $x_2 = \frac{16-4}{8} = \frac{3}{2}$.

По този начин квадратният тричлен може да се представя във вида $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$, или в нашия случай

$$4x^2 - 16x + 15 = 4 \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right) \left(x - \frac{3}{2}\right) = 4 \cdot \frac{2x-5}{2} \cdot \frac{2x-3}{2} = (2x-5) \cdot (2x-3).$$

Сега вече можем да представим подинтегралната функция като сбор от дробно-рационални функции от I вид

$$\begin{aligned} \frac{32x}{(2x-1)(2x-5)(2x-3)} &= \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{2x-5} + \frac{C}{2x-3} = \\ &= \frac{A(2x-5)(2x-3) + B(2x-1)(2x-3) + C(2x-1)(2x-5)}{(2x-1)(4x^2-16x+15)} = \\ &= \frac{4A \cdot x^2 - 6A \cdot x - 10A \cdot x + 15A + 4Bx^2 - 6Bx - 2Bx + 3B + 4Cx^2 - 10 \cdot Cx - 2 \cdot Cx + 5C}{(2x-1)(4x^2-16x+15)} = \\ &= \frac{4(A+B+C) \cdot x^2 - (16A+8B+12C) \cdot x + (15A+3B+5C)}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}. \end{aligned}$$

И така

$$\frac{0 \cdot x^2 + 32x + 0}{(2x-1)(4x^2-16x+15)} = \frac{4(A+B+C) \cdot x^2 - (16A+8B+12C) \cdot x + (15A+3B+5C)}{(2x-1)(4x^2-16x+15)},$$

откъдето следва системата от уравнения за А, В и С, която решаваме чрез събиране

$$\begin{array}{l|l|l} \left| \begin{array}{l} A+B+C=0 \\ -(16A+8B+12C)=32 \\ 15A+3B+5C=0 \end{array} \right. & \Rightarrow & \left| \begin{array}{l} A+B+C=0 \\ 4A+2B+3C=-8 \\ 15A+3B+5C=0 \end{array} \right. & \Rightarrow & \begin{array}{l} (-2) \times \left| \begin{array}{l} A+B+C=0 \\ 4A+2B+3C=-8 \end{array} \right. \\ (-2/3) \times \left| \begin{array}{l} 4A+2B+3C=-8 \\ 15A+3B+5C=0 \end{array} \right. \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} -2A-2B-2C=0 \\ 4A+2B+3C=-8 \\ -10A-2B-(10/3)C=0 \end{array} \right.$$

Събираме почленно второто с първото, и второто с третото уравнение, с което елиминираме В, и получаваме следната система от 2 уравнения:

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A + C = -8 \\ -6A - (10/3)C + (9/3)C = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A + C = -8 \\ -6A - (1/3)C = -8 \end{cases} \times 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A + C = -8 \\ -18A - C = -24 \end{cases}$$

Събираме почленно и тези две уравнения, с което елиминираме и C , и получаваме $-16A = -32$, откъдето следва $A = 2$. Връщайки се назад, изразяваме последователно:

☞ C : от уравнението $2A + C = -8$, т.е. $C = -8 - 2A$, $\Rightarrow C = -12$, и

☞ B : от уравнението $A + B + C = 0$, т.е. $B = -A - C$, $\Rightarrow B = 10$.

Така получаваме представянето

$$\frac{32x}{(2x-1)(2x-5)(2x-3)} = \frac{2}{2x-1} + \frac{10}{2x-5} - \frac{12}{2x-3},$$

с което заместваме в интеграла и получаваме

$$\begin{aligned} J &= \int \left[\frac{2}{2x-1} + \frac{10}{2x-5} - \frac{12}{2x-3} \right] dx + C = 2 \int \frac{dx}{2x-1} + 10 \int \frac{dx}{2x-5} - 12 \int \frac{dx}{2x-3} + C = \\ &= 2 \frac{1}{2} \int \frac{d(2x-1)}{2x-1} + 10 \frac{1}{2} \int \frac{d(2x-5)}{2x-5} - 12 \frac{1}{2} \int \frac{d(2x-3)}{2x-3} + C = \\ &= \ln|2x-1| + 5 \ln|2x-5| - 6 \ln|2x-3| + C \end{aligned}$$

Отг.: $J = \ln|2x-1| + 5 \ln|2x-5| - 6 \ln|2x-3| + C$.

☞ **За дом. работа:** зад. 2. $J = \int \frac{7x-4}{3x^2+2x+5} dx = ?$

Решение:

Квадратният тричлен в знаменателя $3x^2 + 2x + 5 = x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \equiv x^2 + px + q$

няма реални корени, понеже дискриминантата му $D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5$ е отрицателна. Очевидно интегралът от тази дробно-линейна функция е от II вид, следователно

трябва да приложим субституцията на Хорнер $x = t - \frac{p}{2} \equiv t - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right) = t - \frac{1}{3}$, като

очевидно $dx = dt$. При тази субституция подинтегралната функция ще се представи така:

$$\frac{7x-4}{3x^2+2x+5} = \frac{7\left(t-\frac{1}{3}\right)-4}{3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(t-\frac{1}{3}\right)+5} = \frac{7t-\frac{7}{3}-4}{3t^2-3 \cdot 2 \cdot t \cdot \frac{1}{3}+3 \cdot \frac{1}{9}+2t-\frac{2}{3}+5} =$$

$$= \frac{7t - \frac{7}{3} - \frac{12}{3}}{3t^2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 5} = \frac{7t - \frac{19}{3}}{3t^2 + -\frac{1}{3} + \frac{15}{3}} = \frac{7t - \frac{19}{3}}{3t^2 + \frac{14}{3}}$$

Заместваме това представяне в интеграла, и получаваме

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{7x-4}{3x^2+2x+5} dx = \int \frac{7t - \frac{19}{3}}{3t^2 + \frac{14}{3}} dt = 7 \int \frac{t dt}{3t^2 + \frac{14}{3}} - \frac{19}{3} \int \frac{dt}{3t^2 + \frac{14}{3}} = \\ &= 7 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2)}{3t^2 + \frac{14}{3}} - \frac{19}{3} \int \frac{dt}{\frac{14}{3} \left(\frac{9}{14} t^2 + 1 \right)} = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{3} \int \frac{d\left(3t^2 + \frac{14}{3}\right)}{\left(3t^2 + \frac{14}{3}\right)} - \frac{19}{3} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} dt}{\left(\frac{3}{\sqrt{14}} t\right)^2 + 1} = \\ &= \frac{7}{6} \cdot \ln \left| 3t^2 + \frac{14}{3} \right| - \frac{19}{3\sqrt{14}} \int \frac{d\left(\frac{3t}{\sqrt{14}}\right)}{\left(\frac{3t}{\sqrt{14}}\right)^2 + 1} = \frac{7}{6} \cdot \ln \left(3t^2 + \frac{14}{3} \right) - \frac{19}{3\sqrt{14}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{3t}{\sqrt{14}} \right). \end{aligned}$$

Остава да възстановим старата интеграционна променлива x от полагането.

За целта в получения резултат заместваме $t = x + \frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned} J &= \frac{7}{6} \cdot \ln \left(3t^2 + \frac{14}{3} \right) - \frac{19}{3\sqrt{14}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{3t}{\sqrt{14}} \right) = \frac{7}{6} \cdot \ln \left[3 \left(x + \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{14}{3} \right] - \frac{19}{3\sqrt{14}} \cdot \operatorname{arctg} \left[\frac{3 \left(x + \frac{1}{3} \right)}{\sqrt{14}} \right] = \\ &= \frac{7}{6} \cdot \ln \left[3x^2 + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} x + 3 \cdot \frac{1}{9} + \frac{14}{3} \right] - \frac{19}{3\sqrt{14}} \cdot \operatorname{arctg} \left[\frac{3x+1}{\sqrt{14}} \right] = \\ &= \frac{7}{6} \cdot \ln [3x^2 + 2 \cdot x + 5] - \frac{19}{3\sqrt{14}} \cdot \operatorname{arctg} \left[\frac{3x+1}{\sqrt{14}} \right], \end{aligned}$$

където е използван табличният интеграл $\int \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \operatorname{arctg} \xi$.

$$\text{И така: } J = \frac{7}{6} \cdot \ln [3x^2 + 2 \cdot x + 5] - \frac{19}{3\sqrt{14}} \cdot \operatorname{arctg} \left[\frac{3x+1}{\sqrt{14}} \right]$$

Въпрос 4. Определен интеграл. Дефиниция и свойства. Лице на криволинеен трапец

1. Дефиниция:

Дадена е функцията $f(x)$, $x \in [a, b]$. Разглеждаме **разбиване** τ на интервала $[a, b]$ с делящи точки $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$.

По този начин интервалът $[a, b]$ се представя във вида $[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{i-1}, x_i] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n]$, като дължините на всеки от интервалите са: $\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$.

Диаметър на разбиването ще наричаме най-големият измежду интервалите, т.е. $\delta_\tau = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$. Избираме точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n$.

Под **Риманова интегрална сума** $\sigma(f, \tau, \xi_i)$ ще разбираме величината $\sigma(f, \tau, \xi_i) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_i)\Delta x_i + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n$, където $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \equiv f(\xi_i)\Delta x_i$ представлява лицето на i -тия правоъгълник, имащ за страни стойността на функцията $f(\xi_i)$ в точка ξ_i от този интервал, и дължината $(x_i - x_{i-1}) \equiv \Delta x_i$ на същия този интервал.

Тази сбор от произведения, при крайно разбиване, може да бъде представен чрез сумата

$$\sigma_\tau(f, \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i,$$

която, при геометрична интерпретация, дава сбора от лицата на гореуказаните правоъгълници.

Определение: Казваме, че функцията $f(x)$ е интегрируема в интервала $[a, b]$, ако съществува границата, към която клони сумата $\sigma_\tau(f, \xi_i)$, когато диаметъра на разбиването δ_τ клони към нула, т.е. ако съществува $\lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi_i)$.

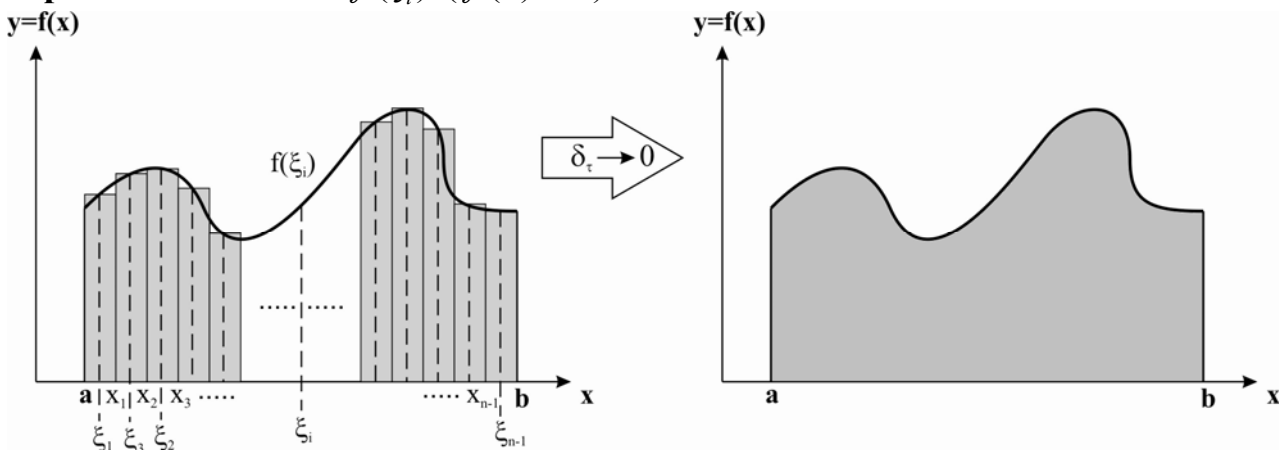
Големината на $\sigma_\tau(f, \xi_i)$ при $\delta_\tau \rightarrow 0$, (ако съществува), се нарича **определен интеграл**, и се бележи

$$J = \int_a^b f(x) dx.$$

Следователно $J = \lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi_i)$.

2. Геометричен смисъл

Чрез определения интеграл се изразява **лицето на криволинеен трапец с вертикални основи** $f(\xi_i)$ ($f(x) \geq 0$).



Както вече видяхме сумата $\sigma_\tau(f, \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ представлява **сума от лица на правоъгълници**. Тази сума, при малки дължини на интервалите Δx_i , е приблизително равна на лицето S_{Tp} на криволинейния трапец, имащ за основи $f(a)$ и $f(b)$, и е заключен между абсцисната ос и графиката на функцията $f(x)$, като клони към него (**интуитивно**) при $\delta_\tau \rightarrow 0$, т.е. $S_{Tp} = \lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi_i)$.

Но от друга страна, както вече видяхме, $\lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi_i) = \int_a^b f(x) dx$.

От последните две равенства следва, че $S_{Tp} = \int_a^b f(x) dx$.

3. Свойства на определения интеграл

☞ **Първо свойство:** $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

Доказателство:

$$\begin{aligned} \sigma_\tau(f + g, \xi_i) &= [f(\xi_1) + g(\xi_1)]\Delta x_1 + [f(\xi_2) + g(\xi_2)]\Delta x_2 + \dots + [f(\xi_n) + g(\xi_n)]\Delta x_n = \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i = \sigma_\tau(f, \xi_i) + \sigma_\tau(g, \xi_i), \end{aligned}$$

следователно

$$(1) \quad \lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f + g, \xi_i) = \lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi_i) + \lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(g, \xi_i).$$

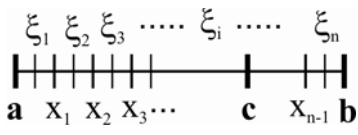
$$\text{Но: } \lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f + g, \xi_i) = \int_a^b [f(x) + g(x)] dx;$$

$$\lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi_i) = \int_a^b f(x) dx; \text{ и}$$

$$\lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(g, \xi_i) = \int_a^b g(x) dx,$$

откъдето след заместване в (1) получаваме търсеното доказателство.

☞ **Второ свойство:**

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$


☞ **Трето свойство:** ако $a < c < b$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

☞ **Четвърто свойство:** ако за $\forall x \in [a, b]$ е изпълнено $m \leq f(x) \leq M$, то

$$m.(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M.(b-a).$$

Доказателство: очевидно за $\forall i \quad m \leq f(\xi_i) \leq M$. Нека умножим двете страни на последното равенство със $(x_i - x_{i-1})$, при което получаваме

$$m.(x_i - x_{i-1}) \leq f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq M.(x_i - x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Нека тези неравенства (за $\forall i$) съберем почленно

$$\sum_{i=1}^n m.(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n M.(x_i - x_{i-1}), \text{ или още}$$

$$m.\sum_{i=1}^n \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \leq M.\sum_{i=1}^n \Delta x_i.$$

Но $\sum_{i=1}^n \Delta x_i = \Delta x \equiv (b-a)$, и още по дефиниция за $\sigma_\tau(f, \xi_i)$ следва, че

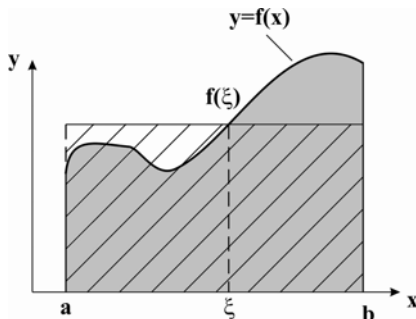
$$m.(b-a) \leq \sigma_\tau(f, \xi_i) \leq M.(b-a).$$

Ако в последното неравенство (двойно) извършим граничен преход $\Delta x \rightarrow 0$, и отчетем второ свойство, ще получим

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} m.(b-a) \leq \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi_i) \leq \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} M.(b-a), \text{ откъдето следва}$$

$$m.(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M.(b-a), \text{ к.т.д.}$$

☞ **Пето свойство:** ако $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$, то \exists т. $\xi \in [a, b]$, че



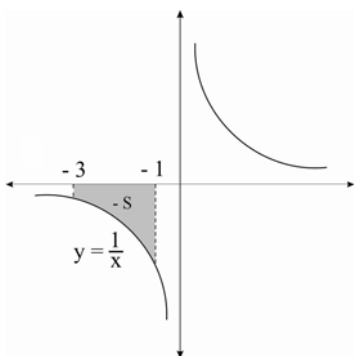
$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad - \quad \text{теорема за}$$

средната стойност

Доказателството на пето свойство почива на четвърто свойство и на геометричната интерпретация на определен интеграл.

Според тази геометрична интерпретация стойността на определения интеграл, даваща се с лицето на оцветения в сиво криволинеен трапец, е равна на лицето на заштрихования правоъгълник, имащ страни $f(\xi)$ и $(b-a)$ съответно.

☞ **Примери и задачи, свързани с геометричната интерпретация на интеграл:**



Пример:

$$\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_{-3}^{-1} = \ln|-1| - \ln|-3| = \ln 1 - \ln 3 = -\ln 3,$$

понеже $\ln 1 = 0$.

Функцията $\frac{1}{x}$ е непрекъсната за $\forall x \neq 0$.

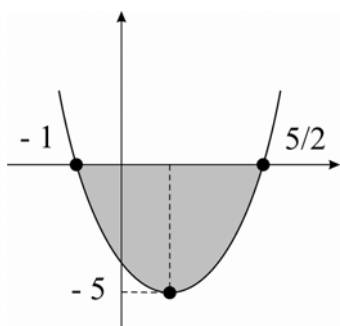
✎ **Задача 1:** Намерете лицето на фигурата, заградена от оста Ох и параболата $y = 2x^2 - 3x - 5$.

Решение: Корените на квадратния тричлен $y = 2x^2 - 3x - 5$ са:

$$x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4}, \Rightarrow x_1 = \frac{3 + 7}{4} = \frac{5}{2}, \quad x_2 = \frac{3 - 7}{4} = -1.$$

Върхът на параболата има абсциса $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-3)}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$, и ордината

$$y_0 = y(x_0) = 2x_0^2 - 3x_0 - 5 = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{4} - 5 = \frac{18}{16} - \frac{9}{4} - 5 = \frac{18}{16} - \frac{36}{16} - \frac{80}{16} = -\frac{98}{16} = -6,125$$



Лицето на заштрихованата фигура е

$$S = -\int_{-1}^{5/2} (2x^2 - 3x - 5) dx.$$

Стойността на интеграла се взема със знак „минус,,

защото в целия интервал $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$ функцията

$$y = 2x^2 - 3x - 5 \leq 0.$$

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-1}^{5/2} (2x^2 - 3x - 5) dx = -2 \int_{-1}^{5/2} x^2 dx + 3 \int_{-1}^{5/2} x dx + 5 \int_{-1}^{5/2} dx = -2 \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{5/2} + 3 \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{5/2} + 5x \Big|_{-1}^{5/2} = \\ &= -\frac{2}{3} \left[\left(\frac{5}{2}\right)^3 - (-1)^3 \right] + \frac{3}{2} \left[\left(\frac{5}{2}\right)^2 - (-1)^2 \right] + 5 \left[\frac{5}{2} - (-1) \right] = \\ &= -\frac{2}{3} \left[\frac{125}{8} + 1 \right] + \frac{3}{2} \left[\frac{25}{4} - 1 \right] + 5 \left[\frac{5}{2} + 1 \right] = -\frac{2}{3} \cdot \frac{133}{8} + \frac{3}{2} \cdot \frac{21}{4} + 5 \cdot \frac{7}{2} = \dots \approx 14,5 \end{aligned}$$

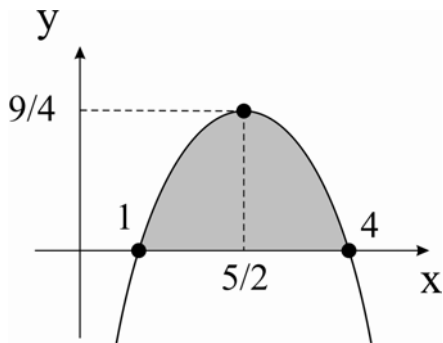
✎ **Задача за СР:** Намерете лицето на фигурата, заключена между оста Ох и параболата $y = -x^2 + 5x - 4$

Решение: Корените на квадратния тричлен $y = -x^2 + 5x - 4$ са:

$$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2 \cdot (-1)} = -\frac{-5 \pm 3}{2}, \Rightarrow x_1 = -\frac{-5 + 3}{2} = 1, \quad x_2 = -\frac{-5 - 3}{2} = 4.$$

Върхът на параболата има абсциса $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2 \cdot (-1)} = \frac{5}{2}$, и ордината

$$y_0 = y(x_0) = -x_0^2 + 5x_0 - 4 = -\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5 \cdot \frac{5}{2} - 4 = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} - 4 = -\frac{25}{4} + \frac{50}{4} - \frac{16}{4} = \frac{9}{4}.$$



Лицето на заштрихованата фигура е

$$S = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx.$$

$$S = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx = -\int_1^4 x^2 dx + 5\int_1^4 x dx - 4\int_1^4 dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3} \Big|_1^4 + 5\frac{x^2}{2} \Big|_1^4 - 4x \Big|_1^4 =$$

$$= -\left(\frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) + 5\left(\frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) - 4(4-1) = -\left(\frac{64}{3} - \frac{1}{3}\right) + 5\left(\frac{16}{2} - \frac{1}{2}\right) - 12 =$$

$$= -\frac{63}{3} + 5 \cdot \frac{15}{2} - 12 = -21 + \frac{75}{2} - 12 = 37\frac{1}{2} - 33 = 4\frac{1}{2}.$$

И така, лицето на фигурата, заключена между оста Ox и параболата $y = -x^2 + 5x - 4$ е $S = 4\frac{1}{2}$.

Въпрос 4. Пресмятане на определени интеграли. Формула на Нютон-Лайбниц. Интегриране по части

Формула на Нютон-Лайбниц: нека $f(x)$ е непрекъснатата в $[a, b]$, и нека $F(x)$ е една нейна примитивна в $[a, b]$, т.е. $F'(x) = f(x)$. Тогава

$$(1) \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \equiv F(x) \Big|_a^b.$$

Намиране на $F(x) = \int f(x) dx$, т.е. на $F'(x) = f(x)$.

Пример: $\int_{\pi/3}^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_{\pi/3}^{\pi/6} d(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x \Big|_{\pi/3}^{\pi/6} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}.$

Интегриране по части:

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x),$$

или още

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx.$$

Доказателство: изхождаме от формулата за диференциране $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Ако положим $[u(x)v(x)]' = F'(x)$ и $f(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, то съгласно формулата на Нютон-Лайбниц ще следва, че

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \equiv F(x) \Big|_a^b, \text{ т.е.}$$

$$\int_a^b [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)] dx = [u(x)v(x)] \Big|_a^b, \text{ или}$$

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)] \Big|_a^b, \text{ или}$$

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx, \text{ с което теоремата е доказана.}$$

☞ **Пример (зад.1):** $J = \int_{1/e}^e |\ln x| dx = ?$

Решение: За решаването на този интеграл ще вземем под внимание следните съображения:

1) Нека положим $u(x) = \ln x$, и $v(x) = x$, което ще използваме за интегриране по части;

2) $\int_{1/e}^e \dots dx = \int_{1/e}^1 \dots dx + \int_1^e \dots dx$, което ще позволи да „разкрием“ $|\ln x|$, а

именно

а) $\int_{1/e}^1 |\ln x| dx = \int_{1/e}^1 (-\ln x) dx$, понеже при $\left[\frac{1}{e} \leq x \leq 1\right] \Rightarrow \ln x < 0$, т.е. $|\ln x| = -\ln x$,

и

б) $\int_1^e |\ln x| dx = \int_1^e (+\ln x) dx$, понеже при $[1 \leq x \leq e] \Rightarrow \ln x > 0$, т.е. $|\ln x| = +\ln x$;

3) ***Мат. справка:** $\ln e = 1$, $\ln \frac{1}{e} = \ln e^{-1} = -1 \cdot \ln e = -1$, и $\ln 1 = 0$.

С отчитането на тези 3 факта ще имаме:

$$\begin{aligned} J &= \int_{1/e}^e |\ln x| dx = \int_{1/e}^1 (-\ln x) dx + \int_1^e (+\ln x) dx \equiv \int_{1/e}^e \ln x dx - \int_{1/e}^1 \ln x dx = \dots \text{ (по части)} = \\ &= x \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x d(\ln x) - \left[x \cdot \ln x \Big|_{1/e}^1 - \int_{1/e}^1 x d(\ln x) \right] = \\ &= [e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1] - \int_1^e x \frac{1}{x} dx - \left[1 \cdot \ln 1 - \frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1}{e} \right] + \int_{1/e}^1 x \frac{1}{x} dx = \\ &= e - \int_1^e dx + \left[\frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1}{e} \right] + \int_{1/e}^1 dx = e - (e - 1) + \left[\frac{1}{e} \cdot \ln e^{-1} \right] + \left[1 - \frac{1}{e} \right] = \frac{1}{e}(-1) - \frac{1}{e} = -\frac{2}{e}. \end{aligned}$$

И така, $J = \int_{1/e}^e |\ln x| dx = -\frac{2}{e}$.

☞ **Зад. 2.** $J = \int_1^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx = ?$

Решение: За решаване „по части” приемаме, че $u(x) = \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}}$ и $v(x) = x$. Така получаваме

$$(1) \quad J = \int_1^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx = x \cdot \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} \Big|_1^3 - \int_1^3 x d \left[\arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} \right].$$

Използваме, че производната $\frac{d}{d\xi} (\arcsin \xi) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$, и че $dF(x) = \frac{dF(x)}{dx} \cdot dx$,

и получаваме:

$$\begin{aligned} d \left[\arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} \right] &= \frac{d}{dx} \left[\arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} \right] dx = \frac{1}{\sqrt{1 - \left[\sqrt{\frac{x}{1+x}} \right]^2}} \frac{d}{dx} \left[\sqrt{\frac{x}{1+x}} \right] dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{1+x}}} \left(\frac{1}{2} \left[\frac{x}{1+x} \right]^{-1/2} \right) \frac{d}{dx} \left[\frac{x}{1+x} \right] dx = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x-x}{1+x}}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) \left[\frac{1(1+x) - x \cdot 1}{(1+x)^2} \right] dx = \\ &= \left(\frac{1}{2} \sqrt{1+x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) \frac{1}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{2} \frac{(1+x)}{(1+x)^2 \cdot \sqrt{x}} dx = \frac{dx}{2(1+x)\sqrt{x}}, \end{aligned}$$

т.е. намерихме, че

$$(2) \quad d \left[\arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} \right] = \frac{1}{2} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

Заместваме (2) в (1) и получаваме

$$\begin{aligned} J &= x \cdot \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} \Big|_1^3 - \int_1^3 \left[\frac{1}{2} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \right] = 3 \cdot \arcsin \sqrt{\frac{3}{1+3}} - 1 \cdot \arcsin \sqrt{\frac{1}{1+1}} - \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{x dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \\ &= 3 \cdot \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x} (1+x)} dx = 3 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx. \end{aligned}$$

И така

$$(3) \quad J = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx \equiv \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} J_1,$$

където интегралът $J_1 = \int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$ ще решим отделно. За неговото решаване полагаме

$$(4) \quad x = t^2, \text{ т.е. } dx = 2t \cdot dt,$$

при което $x = 1 \rightarrow t = 1$, а $x = 3 \rightarrow t = \sqrt{3}$. Така интегралът J_1 добива вида

$$(5) \quad J_1 = \int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t}{1+t^2} 2t dt = 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{1+t^2} dt = 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2 + 1 - 1}{1+t^2} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+t^2}{1+t^2} dt - 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = 2 \int_1^{\sqrt{3}} dt - 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = 2t \Big|_1^{\sqrt{3}} - 2 \cdot \operatorname{arctg} t \Big|_1^{\sqrt{3}} = \\
&= 2(\sqrt{3}-1) - 2(\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1) = 2(\sqrt{3}-1) - 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = 2(\sqrt{3}-1) - 2 \cdot \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}$$

И така доказахме, че

$$(6) \quad J_1 = 2(\sqrt{3}-1) - \frac{\pi}{6}.$$

Заместваме (6) в (3) и получаваме:

$$\begin{aligned}
(7) \quad J &= \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} J_1 = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} \left(2(\sqrt{3}-1) - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{3\pi}{4} - (\sqrt{3}-1) + \frac{\pi}{12} = \\
&= \frac{3}{3} \cdot \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{12} - \sqrt{3} + 1 = \frac{10\pi}{12} - \sqrt{3} + 1 = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} + 1.
\end{aligned}$$

Въпрос 5: Смяна на променливата при определени интеграл

Теорема (теорема за смяна на променливата): Нека $f(x)$ е една непрекъснатата в $[a, b]$ функция. Полагаме $x = \varphi(t)$, където $\varphi(t)$ има непрекъснатата първа производна $\varphi'(t)$ в интервал $[\alpha, \beta]$, и нека е изпълнено $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$. Тогава

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt,$$

където е използвано, че $dx = d[\varphi(t)] = \frac{d}{dt}[\varphi(t)] \cdot dt = \varphi'(t) \cdot dt$.

☞ **Пример 1:** $J = \int_1^{\frac{4}{3}} \frac{2x}{\sqrt{3x^2 + 2x - 1}} dx = ?$

Решение: Полагаме: $x = t - \frac{b}{2a} = t - \frac{2}{2 \cdot 3} = t - \frac{1}{3}$, като очевидно $dx = dt$.

При $x = 1 \Rightarrow 1 = \alpha - \frac{1}{3}$, т.е. $\alpha = \frac{4}{3}$.

При $x = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{4}{3} = \beta - \frac{1}{3}$, т.е. $\beta = \frac{5}{3}$.

След смяната на променливите интегралът добива вида

$$\begin{aligned}
J &= \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{2 \cdot \left(t - \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{3 \left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + 2 \left(t - \frac{1}{3}\right) - 1}} dt = \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{2t - \frac{2}{3}}{\sqrt{3t^2 - 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot t + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2t - \frac{2}{3} - 1}} dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{4/3}^{5/3} \frac{2t - \frac{2}{3}}{\sqrt{3t^2 + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}}} dt = \int_{4/3}^{5/3} \frac{2t - \frac{2}{3}}{\sqrt{3t^2 - \frac{4}{3}}} dt = 2 \int_{4/3}^{5/3} \frac{t dt}{\sqrt{3t^2 - \frac{4}{3}}} - \frac{2}{3} \int_{4/3}^{5/3} \frac{dt}{\sqrt{3t^2 - \frac{4}{3}}} = \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{4/3}^{5/3} \frac{d(t^2)}{\sqrt{3t^2 - \frac{4}{3}}} - \frac{2}{3} \int_{4/3}^{5/3} \frac{dt}{\sqrt{3\left(t^2 - \frac{4}{9}\right)}} = \frac{1}{3} \int_{4/3}^{5/3} \frac{d\left(3t^2 - \frac{4}{3}\right)}{\sqrt{3t^2 - \frac{4}{3}}} - \frac{2}{3} \int_{4/3}^{5/3} \frac{dt}{\sqrt{3} \sqrt{t^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}} = \\
&= \frac{1}{3} \int_{4/3}^{5/3} \left(3t^2 - \frac{4}{3}\right)^{-1/2} d\left(3t^2 - \frac{4}{3}\right) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \int_{4/3}^{5/3} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}} =
\end{aligned}$$

..... тук ще използваме, че $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm a^2}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2 \pm a^2} \right| + \dots$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \frac{1}{(-1/2)+1} \left(3t^2 - \frac{4}{3}\right)^{1/2} \Big|_{4/3}^{5/3} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \ln \left| t + \sqrt{t^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} \right| \Big|_{4/3}^{5/3} = \\
&= \frac{2}{3} \left(\sqrt{3\left(\frac{5}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}} - \sqrt{3\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}} \right) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\ln \left| \frac{5}{3} + \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} \right| - \ln \left| \frac{4}{3} + \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} \right| \right) = \\
&= \frac{2}{3} \left(\sqrt{3\frac{25}{9} - \frac{4}{3}} - \sqrt{3\frac{16}{9} - \frac{4}{3}} \right) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\ln \left| \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{25}{9} - \frac{4}{9}} \right| - \ln \left| \frac{4}{3} + \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{4}{9}} \right| \right) = \\
&= \frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{25}{3} - \frac{4}{3}} - \sqrt{\frac{16}{3} - \frac{4}{3}} \right) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\ln \left| \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{21}{9}} \right| - \ln \left| \frac{4}{3} + \sqrt{\frac{12}{9}} \right| \right) = \\
&= \frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{21}{3}} - \sqrt{\frac{12}{3}} \right) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\ln \left| \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{7}{3}} \right| - \ln \left| \frac{4}{3} + \sqrt{\frac{4}{3}} \right| \right) = \\
&= \frac{2}{3} \left(\sqrt{7} - \sqrt{4} \right) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\ln \left| \frac{5}{3} + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \right| - \ln \left| \frac{4}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \right| \right) = \\
&= \frac{2\sqrt{7} - 4}{3} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \ln \left| \frac{4}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \right| - \frac{2}{3\sqrt{3}} \ln \left| \frac{5}{3} + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \right|.
\end{aligned}$$

☞ **Зад. 2:** $J = \int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} dx = ?$

Решение: Полагаме: $1-x = t^3$, т.е. $x = 1-t^3 \Rightarrow dx = -3t^2 dt$

- при $x = 1 \rightarrow 1-1 = \alpha^3 \Rightarrow \alpha = 0$.

- при $x = 9 \rightarrow 1-9 = \beta^3 \Rightarrow \beta = -2$.

Така след смяната на променливите интегралът добива вида

$$\begin{aligned} (1) \quad J &= \int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} dx = \int_0^{-2} (1-t^3) \sqrt[3]{t^3} (-3t^2 dt) = -3 \int_0^{-2} (1-t^3) t \cdot t^2 dt = \\ &= -3 \int_0^{-2} t^3 (1-t^3) dt = -3 \int_0^{-2} t^3 dt + 3 \int_0^{-2} t^6 dt = -3 \frac{t^4}{4} \Big|_0^{-2} + 3 \frac{t^7}{7} \Big|_0^{-2} = \\ &= -\frac{3}{4} (2^4 - 0^4) + \frac{3}{7} (2^7 - 0^7) = -\frac{3}{4} \cdot 16 + \frac{3}{7} \cdot 2^7 = -12 + \frac{3 \cdot 128}{7} = \frac{384}{7} - \frac{84}{7} = \frac{300}{7} = 42 \frac{6}{7}. \end{aligned}$$

☞ **Пример 2:** $\int_{-2}^2 \sqrt{\frac{2-x}{3+x}} dx = ?$

Решение: полагаме $\frac{2-x}{3+x} = t^2$.

Следователно $2-x = t^2(3+x)$, т.е. $x(t^2+1) = 2-3t^2$, откъдето $x = \frac{2-3t^2}{t^2+1}$.

$$dx = \frac{-6t(t^2+1) - (2-3t^2) \cdot 2t}{(t^2+1)^2} dt = \frac{-6t^3 - 6t - 4t + 6t^3}{(t^2+1)^2} dt = \frac{-10t}{(t^2+1)^2} dt.$$

- при $x = -2 \rightarrow \frac{2-(-2)}{3+(-2)} = \alpha^2 \Rightarrow \alpha = 2$.

- при $x = 2 \rightarrow \frac{2-2}{3+2} = \beta^2 \Rightarrow \beta = 0$.

Така след смяната на променливите интегралът добива вида

$$\begin{aligned} (1) \quad J &= \int_{-2}^2 \sqrt{\frac{2-x}{3+x}} dx = \int_2^0 \sqrt{t^2} \frac{-10t}{(t^2+1)^2} dt = -10 \int_2^0 t \frac{t}{(t^2+1)^2} dt = \\ &= -10 \frac{1}{2} \int_2^0 t (t^2+1)^{-2} d(t^2+1) = 5 \int_0^2 t (t^2+1)^{-2} d(t^2+1), \end{aligned}$$

където е използвано, че $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

За да се подготвим за интегриране по части, е нужно да внесем $(t^2+1)^{-2}$ под знака на диференциала. А това става, като внесем в (под) диференциала примитивната функция $F(t) = \int (t^2+1)^{-2} dt = \frac{(t^2+1)^{-1}}{-1}$. Така за интеграла J получаваме по-нататък

$$J = 5 \int_0^2 t d \frac{(t^2+1)^{-1}}{-1} = -5 \int_0^2 t d(t^2+1)^{-1} = \dots \text{ (по части) } \dots =$$

$$\begin{aligned}
&= -5t(t^2+1)^{-1} \Big|_0^2 + 5 \int_0^2 (t^2+1)^{-1} dt = \\
&= -5 \frac{t}{t^2+1} \Big|_0^2 + 5 \int_0^2 \frac{dt}{t^2+1} = -5 \left(\frac{2}{2^2+1} - \frac{0}{0^2+1} \right) + 5 \int_0^2 \frac{dt}{1+t^2} = \\
&= -5 \frac{2}{5} + 5 \cdot \operatorname{arctg} t \Big|_0^2 = -2 + 5 \cdot (\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 0) = -2 + 5 \operatorname{arctg} 2,
\end{aligned}$$

където е използвано, че $\int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t$, и $\operatorname{arctg} 0 = 0$.

☞ **Пример 3:** $J = \int_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2} dx = ?$

Решение: понеже $\sqrt{3 \left[1 - \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right)^2 \right]} = \sqrt{3} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right)^2 \right]}$, то удачно е да

положим $x = \sqrt{3} \cdot \sin t$.

При това полагане подкоренната величина ще стане

$$\sqrt{3-x^2} = \dots = \sqrt{3} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\sqrt{3} \cdot \sin t}{\sqrt{3}} \right)^2 \right]} = \sqrt{3} \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{3} \sqrt{\cos^2 t} = \sqrt{3} \cdot \cos t.$$

Тогава $dx = \sqrt{3} \cdot \cos t dt$, като:

$$- \text{при } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot \sin \alpha, \text{ т.е. } \sin \alpha = \frac{1}{2}, \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6};$$

$$- \text{при } x = \sqrt{3} \rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sin \alpha, \text{ т.е. } \sin \alpha = 1, \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Така след смяната на променливите интегралът добива вида

$$\begin{aligned}
J &= \int_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sqrt{3} \cdot \cos t \cdot (\sqrt{3} \cdot \cos t dt) = 3 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 t dt = 3 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\
&= 3 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{3}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} dt + \frac{3}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos 2t dt = \frac{3}{2} t \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos 2t d(2t) = \\
&= \frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{3}{4} \cdot \sin 2t \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{3}{2} \left(\frac{3\pi - \pi}{6} \right) + \frac{3}{4} \left(\sin 2 \frac{\pi}{2} - \sin 2 \frac{\pi}{6} \right) = \\
&= \frac{3}{2} \frac{\pi}{3} + \frac{3}{4} \left(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{4} \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8}.
\end{aligned}$$

☞ **За Д.Р.:** $J = \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+x+1} dx = ?$

Решение: квадратния тричлен в знаменателя има отрицателна дискриминанта, и следователно не може да се разложи на прости множители. Това означава, че подинтегралната функция е дробно-линейна функция от II вид,

и затова прилагаме субституцията на Хорнер: $x = t - \frac{b}{2a} = t - \frac{1}{2 \cdot 1} = t - \frac{1}{2}$, като очевидно $dx = dt$. Така подинтегралната функция добива вида

$$\frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right) + 1} = \frac{1}{2} \frac{2t - 1}{t^2 - 2t \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + t - \frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{2} \frac{2t - 1}{t^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{2} \frac{2t - 1}{t^2 + \frac{3}{4}}$$

Заместваме в интеграла и получаваме

$$\begin{aligned} J &= \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{2t - 1}{t^2 + \frac{3}{4}} dx = \int_{-1}^1 \frac{t dt}{t^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)}{t^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dt}{\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}t^2 + 1\right)} = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(t^2 + \frac{3}{4}\right) \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \int_{-1}^1 \frac{dt}{\left[\left(\frac{\sqrt{3} \cdot t}{2}\right)^2 + 1\right]} = \\ &= \ln \sqrt{t^2 + \frac{3}{4}} \Big|_{-1}^1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \int_{-1}^1 \frac{d\left(\frac{\sqrt{3} t}{2}\right)}{\left[\left(\frac{\sqrt{3} t}{2}\right)^2 + 1\right]} = \\ &= \left(\ln \sqrt{1^2 + \frac{3}{4}} - \ln \sqrt{(-1)^2 + \frac{3}{4}}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \arctg\left(\frac{\sqrt{3} t}{2}\right) \Big|_{-1}^1 = \\ &= \left(\ln \sqrt{\frac{7}{4}} - \ln \sqrt{\frac{7}{4}}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left[\arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (+1)\right) - \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-1)\right)\right] = \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left[\arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = -\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2 \cdot \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

При преобразованята е използвано, че $\int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctg t$, както и че $\arctg(-\xi) = -\arctg \xi$, понеже \arctg е нечетна функция.

И така $J = -\frac{\sqrt{3}}{2} \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Въпрос 6: Несобствени интеграли (от I и II род)

Нека е дадена функция $f(x)$, дефинирана и непрекъсната в $[a, b]$.

1. **Определение:** под несобствен интеграл $J = \int_a^b f(x) dx$ се разбира границата (ако тя съществува)

$$J = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\beta \rightarrow b \\ \beta < b}} \int_a^\beta f(x) dx.$$

При това:

- а) ако J съществува, то интегралът е сходящ, а
- б) ако J не съществува, то интегралът е разходящ.

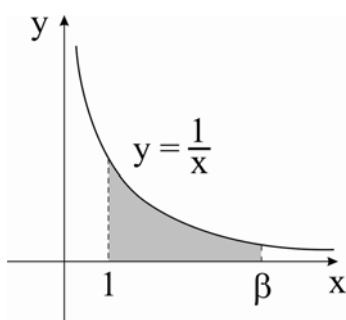
Несобственият интеграл е:

- ☞ от I род, когато $b = \infty$,
- ☞ от II род, когато $b < \infty$.

☞ **Пример 1:** (несобствен интеграл от I род) $J = \int_1^\infty \frac{dx}{x} = ?$

Решение: $J = \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^\beta \frac{dx}{x} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \ln|x| \Big|_1^\beta = \lim_{\beta \rightarrow \infty} (\ln \beta - \ln 1) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \ln \beta = \infty.$

Следователно този несобствен интеграл **не съществува** (интегралът е разходящ).



$$\left(\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = \infty \Rightarrow S = \infty \right)$$

☞ **Пример 2:** (несобствен интеграл от I род) $J = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = ?$

Решение:

$$J = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^\beta \frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{x^{-2+1}}{(-2+1)} \Big|_1^\beta = - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \Big|_1^\beta = - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{1} \right) = -(0 - 1) = 1,$$

понеже $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} = 0$. В този случай интегралът е сходящ, понеже подинтегралната

функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$ много бързо клони към нула при $x \rightarrow \infty$.

☞ **Пример 3:** (несобствен интеграл от II род) $J = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = ?$, като

очевидно $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$ и $f(2) = \infty$.

Решение:

$$\begin{aligned} J &= \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{\substack{\beta \rightarrow 2 \\ \beta < 2}} \int_1^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{\substack{\beta \rightarrow 2 \\ \beta < 2}} \int_1^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = -\lim_{\substack{\beta \rightarrow 2 \\ \beta < 2}} \int_1^{\beta} (2-x)^{-1/2} d(-x+2) = \\ &= -\lim_{\substack{\beta \rightarrow 2 \\ \beta < 2}} \frac{1}{(-1/2+1)} (2-x)^{-\frac{1}{2}+1} \Big|_1^{\beta} = -2 \lim_{\substack{\beta \rightarrow 2 \\ \beta < 2}} \sqrt{2-x} \Big|_1^{\beta} = -2 \lim_{\substack{\beta \rightarrow 2 \\ \beta < 2}} (\sqrt{2-\beta} - \sqrt{2-1}) = \\ &= -2 \left(\sqrt{2 - \lim_{\substack{\beta \rightarrow 2 \\ \beta < 2}} \beta} - 1 \right) = -2 \cdot (\sqrt{2-2} - 1) = -2 \cdot (0 - 1) = 2. \end{aligned}$$

2. Основни несобствени интегралы от I род

Това са интегралы от вида $J = \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}}$, които са:

- ☞ сходящи при $\lambda > 1$, и
- ☞ разходящи при $\lambda \leq 1$.

3. Пресмятане по формулата на Нютон-Лайбниц

От примери 1 и 2 се вижда, че

ако $F(x)$ е примитивната функция на подинтегралната функция $f(x)$ в интервала $[a, b]$, то интегралът

$$J = \int_a^{\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{\infty} = F(\infty) - F(a).$$

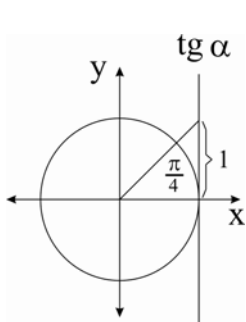
Под $F(\infty)$ тук разбираме $\lim_{\beta \rightarrow \infty} F(\beta) \equiv \lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$.

Задачи, свързани с прилагането на формулата на Нютон-Лайбниц - пресметнете интегралите:

☞ **Пример 1:** $J = \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{dx}{3+x^2} = ?$

Решение: очевидно $f(x) = \frac{1}{(\sqrt{3})^2 + x^2}$ и $f(b) = \infty$ при $b = \infty$. Примитивната

й функция е $F(x) = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$, като в дадения случай $a = \sqrt{3}$, следователно



$$J = \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{dx}{3+x^2} = F(x) \Big|_{\sqrt{3}}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} \Big|_{\sqrt{3}}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \infty - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} (\operatorname{arctg} \infty - \operatorname{arctg} 1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4\sqrt{3}},$$

като в горната формула е отчетено, че $\operatorname{arctg} \infty = \frac{\pi}{2}$, понеже

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \frac{\sin \pi/2}{\cos \pi/2} = \frac{1}{0} = \infty, \quad \text{както и че } \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \text{понеже}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \pi/4}{\cos \pi/4} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1.$$

☞ **Пример 2:** $J = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} = ?$

Решение: подинтегралната функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ има **особеност** в т.

$x = -1$, понеже $f(-1) = \frac{1}{\sqrt{3+2(-1)-(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3-3}} = \infty$. За да намерим

примитивната на $f(x)$, нека положим $x = t - \frac{b}{2a} = t - \frac{2}{2 \cdot (-1)} = t + 1$, следователно

$dx = dt$, като:

$$\begin{aligned} - \text{при } x = -1 &\rightarrow -1 = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha = -2, \\ - \text{при } x = 1 &\rightarrow 1 = \beta + 1 \Rightarrow \beta = 0. \end{aligned}$$

Така след смяната на променливите интегралът добива вида

$$J = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} = \int_{-2}^0 \frac{dt}{\sqrt{3+2(t+1)-(t+1)^2}} = \int_{-2}^0 \frac{dt}{\sqrt{3+2t+2-t^2-2t-1}} = \int_{-2}^0 \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}.$$

По този начин изходният интеграл се сведе до интеграл, чиято подинтегрална функция $f(t) = \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}$ също има особеност и тя е в т. $t = -2$,

понеже $f(-2) = \frac{1}{\sqrt{4-(-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{4-4}} = \infty$, но за сметка на това нейната

примитивна функция може веднага да бъде намерена, и тя е

$$F(t) = \arcsin \frac{t}{\sqrt{4}} = \arcsin \frac{t}{2}, \quad \text{където е използвано, че}$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t, \quad \text{и} \Rightarrow \int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{a} \sqrt{1-\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right)^2}} = \arcsin \frac{t}{\sqrt{a}}.$$

Така за несобствения интеграл получаваме по формулата на Нютон-Лайбниц

$$J = \int_{-2}^0 \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = F(t) \Big|_{-2}^0 = \arcsin \frac{t}{2} \Big|_{-2}^0 = \arcsin \frac{0}{2} - \arcsin \frac{(-2)}{2} = 0 - \arcsin(-1) =$$

$$= \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \text{ където е използвано, че } \arcsin(-\xi) = -\arcsin \xi, \text{ или в случая } \arcsin(-1) = -\arcsin 1.$$

☒ **Пример 3:** $J = \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = ?$

Решение: подинтегралната функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$ има особеност в т.

$x = 2$, понеже $f(2) = \frac{1}{\sqrt{2^2 - 2 - 2}} = \frac{1}{0} = \infty$.

Правим полагането $x = t - \frac{b}{2a} = t - \frac{(-1)}{2 \cdot 1} = t + \frac{1}{2}$, като очевидно $dx = dt$, и

- при $x = 2 \rightarrow 2 = \alpha + \frac{1}{2}$, т.е. $4 = 2\alpha + 1 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$,

- при $x = 4 \rightarrow 4 = \beta + \frac{1}{2}$, т.е. $8 = 2\beta + 1 \Rightarrow \beta = \frac{7}{2}$.

Така след смяната на променливите имаме

$$J = \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(t + \frac{1}{2}\right) - 2}} = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}t + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - t - \frac{1}{2} - 2}} =$$

$$= \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2}} = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{8}{4}}} = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{9}{4}}} = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}}, \text{ т.е.}$$

$$J = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}}.$$

За да определим примитивната функция на последния интеграл, използваме, че

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right|, \text{ следователно } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \int \frac{dx}{a \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}} =$$

$$= \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}} = \ln \left| \frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1} \right| = \ln \left| \frac{x}{a} + \frac{1}{a} \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| = \ln \left| \frac{1}{a} (x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) \right| =$$

$$= \ln \left(\frac{1}{|a|} \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \right).$$

В „нашия“ интеграл $a = \frac{3}{2}$, и следователно

$$\begin{aligned} J &= \int_{3/2}^{7/2} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \ln \left(\frac{2}{3} \left| x + \sqrt{x^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} \right| \right) \Bigg|_{3/2}^{7/2} = \\ &= \ln \left[\frac{2}{3} \left(\frac{7}{2} + \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} \right) \right] - \ln \left[\frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} \right) \right] = \\ &= \ln \left[\frac{2}{3} \left(\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{49-9}{4}} \right) \right] - \ln \left[\frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} + 0 \right) \right] = \ln \left[\frac{1}{3} (7 + 2\sqrt{10}) \right] - \ln 1 = \ln \left(\frac{7 + 2\sqrt{10}}{3} \right) \end{aligned}$$

Задачи от ръководството:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int_{-\infty}^0 \frac{\arctg x}{1+x^2} dx &= \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \int_{\beta}^0 \arctg x d(\arctg x) = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \frac{\arctg^2 x}{2} \Bigg|_{\beta}^0 = \\ &= \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} (\arctg^2 0 - \arctg^2 \beta) = 0 - \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \arctg^2 \beta = -\frac{1}{2} \arctg^2(-\infty) = -\frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{4} = -\frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{\ln(x)}} = ?$$

Решение: полагаме $\ln x = t^3$, при което $e^{\ln x} \equiv x = e^{t^3}$, т.е. $x = e^{t^3}$, $\Rightarrow dx = e^{t^3} \cdot 3t^2 dt$, като

$$\begin{aligned} - \text{при } x=1 &\rightarrow \ln 1 \equiv 0 = \alpha^3, \Rightarrow \alpha = 0, \\ - \text{при } x=e &\rightarrow \ln e \equiv 1 = \beta^3, \Rightarrow \beta = 1. \end{aligned}$$

Така след смяна на променливите интегралът добива вида

$$\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{\ln(x)}} = \int_0^1 \frac{e^{t^3} \cdot 3t^2 dt}{e^{t^3} \cdot \sqrt[3]{t^3}} = 3 \int_0^1 \frac{t^2 dt}{t} = 3 \int_0^1 t dt = \frac{3}{2} t^2 \Bigg|_0^1 = \frac{3}{2} (1^2 - 0^2) = \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{3} J = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x+x^3} = ?$$

$$\begin{aligned} \text{Решение: } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x+x^3} &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^{\beta} \frac{dx}{x(1+x^2)} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^{\beta} \frac{(1+x^2-x^2)dx}{x(1+x^2)} = \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^{\beta} \frac{1}{x} dx - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^{\beta} \frac{x^2 dx}{x(1+x^2)} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^{\beta} \frac{dx}{x} - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^{\beta} \frac{x dx}{1+x^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^{\beta} - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_1^{\beta} \frac{d(x^2+1)}{(1+x^2)} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} (\ln \beta - \ln 1) - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln |x^2+1| \Big|_1^{\beta} = \\
&= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \ln \beta - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [\ln(\beta^2+1) - \ln(1+1)] = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\ln \beta - \frac{1}{2} \ln(\beta^2+1) \right) + \frac{1}{2} \ln 2 = \\
&= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\ln \beta - \ln(\beta^2+1)^{\frac{1}{2}} \right) + \ln 2^{\frac{1}{2}} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \ln \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+1}} + \ln \sqrt{2} = \\
&= \ln \left(\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+1}} \right) + \ln \sqrt{2} = \ln 1 + \ln \sqrt{2} = 0 + \ln \sqrt{2} = \ln \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Въпрос 7: Интегриране по части в несобствени интеграли

$$(1) \quad \int_a^{\infty} u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^{\infty} - \int_a^{\infty} v(x) du(x),$$

където:

$$(2) \quad u(x)v(x) \Big|_a^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} u(x)v(x) - u(a)v(a),$$

ако границите съществуват.

Доказателство: знаем, че

$$\int_a^p u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^p - \int_a^p v(x) du(x).$$

Оставяме $p \rightarrow \infty$ и извършваме граничен преход в (над) горното равенство

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^p u(x) dv(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} u(x)v(x) \Big|_a^p - \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^p v(x) du(x),$$

или още

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^p u(x) dv(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} u(p)v(p) - u(a)v(a) - \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^p v(x) du(x), \text{ т.е.}$$

$$\int_a^{\infty} u(x) dv(x) = u(\infty)v(\infty) - u(a)v(a) - \int_a^{\infty} v(x) du(x),$$

откъдето получаваме

$$\int_a^{\infty} u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^{\infty} - \int_a^{\infty} v(x) du(x), \text{ к.т.д.}$$

☞ **Пример 1:** $J = \int_1^{\infty} \frac{\arctg x}{x^2} dx = ?$

Решение:

$$J = \int_1^{\infty} \frac{\arctg x}{x^2} dx = \int_1^{\infty} \arctg x \cdot x^{-2} dx = \int_1^{\infty} \arctg x d \left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right) = - \int_1^{\infty} \arctg x d \left(\frac{1}{x} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \dots \text{ по части } \dots = \\
&= -\frac{\arctg x}{x} \Big|_1^\infty + \int_1^\infty \frac{1}{x} d(\arctg x) = -\left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctg x}{x} - \frac{\arctg 1}{1} \right] + \int_1^\infty \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \\
&= -\left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctg x}{x} - \frac{\pi}{4} \right] + \int_1^\infty \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx.
\end{aligned}$$

Тук ще отчетем следните 2 неща:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctg x}{x} = 0$, понеже $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$, а $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi/2}{x} = \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$;

2. Подинтегралната функция $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \equiv \frac{1}{x(1+x^2)}$ може да се представи във

вида

$$\frac{1}{x(1+x^2)} \equiv \frac{0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{A(1+x^2) + (Bx+C) \cdot x}{x(1+x^2)} = \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(1+x^2)},$$

т.е.

$$\frac{0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1}{x(1+x^2)} = \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(1+x^2)}$$

От сравняването на коефициентите от двете страни на равенството заключаваме, че

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-1 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}, \text{ откъдето следва, че}$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.$$

Заместваме тези два резултата и за интеграла получаваме по-нататък

$$\begin{aligned}
J &= -\left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctg x}{x} - \frac{\pi}{4} \right] + \int_1^\infty \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} + \int_1^\infty \left[\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right] dx = \\
&= \frac{\pi}{4} + \int_1^\infty \frac{dx}{x} - \int_1^\infty \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} + \int_1^\infty \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} + \left[\ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right] \Big|_1^\infty = \\
&= \frac{\pi}{4} + \left[\ln x - \ln \sqrt{1+x^2} \right] \Big|_1^\infty = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Big|_1^\infty = \frac{\pi}{4} + \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right] - \ln \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} = \\
&= \frac{\pi}{4} + \ln \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right] - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} + \ln \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \right] - \ln 2^{-\frac{1}{2}} = \\
&= \frac{\pi}{4} + \ln \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \right] - \left(-\frac{1}{2} \right) \ln 2 = \frac{\pi}{4} + \ln 1 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.
\end{aligned}$$

☞ **Пример 2:** $J = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin 2x dx = ?$

Решение:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} e^{-x} \sin 2x dx = -\int_0^{\infty} e^{-x} \sin 2x d(-x) = -\int_0^{\infty} \sin 2x d(e^{-x}) = \dots \text{ по части } \dots = \\ &= -e^{-x} \sin 2x \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} d(\sin 2x) = -\frac{\sin 2x}{e^x} \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} e^{-x} \cos 2x dx = \\ &= -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{e^x} + \frac{\sin 2 \cdot 0}{e^0} - 2 \int_0^{\infty} e^{-x} \cos 2x d(-x) = -\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \sin 2x}{e^{\infty}} + \frac{\sin 0}{1} - 2 \int_0^{\infty} \cos 2x d(e^{-x}) = \\ &= -2 \int_0^{\infty} \cos 2x d(e^{-x}), \text{ като тук е отчетено, че } \lim_{x \rightarrow \infty} \sin 2x \text{ не съществува, но е} \end{aligned}$$

величина, имаща стойност в интервала $[-1, 1]$, докато $e^{\infty} \rightarrow \infty$, следователно

$$\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \sin 2x}{e^{\infty}} = 0. \text{ И така}$$

$$\begin{aligned} J &= -2 \int_0^{\infty} \cos 2x d(e^{-x}) = \dots \text{ по части } \dots = \\ &= -2 \cdot e^{-x} \cos 2x \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} e^{-x} d(\cos 2x) = -2 \cdot \frac{\cos 2x}{e^x} \Big|_0^{\infty} + 2 \cdot (-2) \int_0^{\infty} e^{-x} \sin 2x dx = \\ &= -2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos 2x}{e^x} + 2 \cdot \frac{\cos 2 \cdot 0}{e^0} - 4 \int_0^{\infty} e^{-x} \sin 2x dx = -2 \cdot \frac{\cos 2\infty}{e^{\infty}} + 2 \cdot \frac{\cos 2 \cdot 0}{e^0} - 4J = 2 - 4J, \end{aligned}$$

където е отчетено, че $\frac{\cos \infty}{e^{\infty}} = 0$, а $\frac{\cos 0}{e^0} = \frac{1}{1} = 1$. И така, в резултат на направените дотук преобразования на интеграла J получихме, че

$$J = 2 - 4J, \Rightarrow 5J = 2, \Rightarrow J = \frac{2}{5}.$$

☞ **Задача за С.Р.:** $J = \int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx = ?$

$$\begin{aligned} \text{Решение: } J &= \int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx = \int_1^{\infty} \ln(1+x^2) x^{-2} dx = \int_1^{\infty} \ln(1+x^2) d\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) = \\ &= \dots \text{ по части } \dots = -\int_1^{\infty} \ln(1+x^2) d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln(1+x^2)}{x} \Big|_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{1}{x} d(\ln(1+x^2)) = \\ &= -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} + \frac{\ln(1+1^2)}{1} + \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} + \ln 2 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)} \end{aligned}$$

Ще пресметнем отделно следните два компонента от последния запис:

a) $-\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \dots \text{ неопределеност } \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \Rightarrow \text{ по Лопитал } \dots =$

$$= -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} [\ln(1+x^2)]}{\frac{d}{dx}(x)} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{1} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^2} = 0, \text{ и}$$

б) за пресмятане на интеграла $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$ най-напред ще представим

подинтегралната му функция като сбор от прости дробно-линейни функции

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{A(1+x^2) + (Bx+C)x}{x(1+x^2)} = \frac{A + Ax^2 + Bx^2 + Cx}{x(1+x^2)}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1}{x(1+x^2)} = \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(1+x^2)}, \text{ откъдето следват равенствата}$$

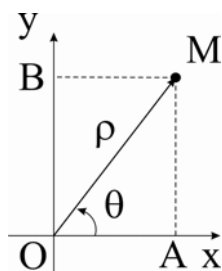
$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}, \text{ следователно}$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.$$

С отчитането на намерените представяния, за интеграла ще имаме по-нататък

$$\begin{aligned} J &= -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} + \ln 2 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)} = \ln 2 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} - \int_1^{\infty} \frac{x dx}{1+x^2} = \\ &= \ln 2 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = \ln 2 + \left(\ln|x| - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| \right) \Big|_1^{\infty} = \dots / |x| \equiv x / \dots = \\ &= \ln 2 + \left(\ln x - \ln \sqrt{1+x^2} \right) \Big|_1^{\infty} = \ln 2 + \ln \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \Big|_1^{\infty} = \\ &= \ln 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) - \ln \left(\frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \right) = \ln 2 + \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) - \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \\ &= \ln 2 + \ln 1 - (\ln 1 - \ln \sqrt{2}) = \ln 2 + \ln \sqrt{2} = \ln 2 + \ln 2^{\frac{1}{2}} = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Въпрос 8: Полярни координати. Криви в полярни координати

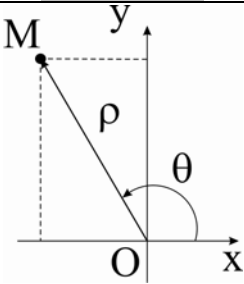
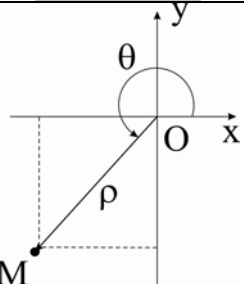
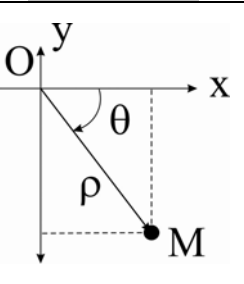


Полярно разстояние: $\rho = \left| \vec{OM} \right|,$

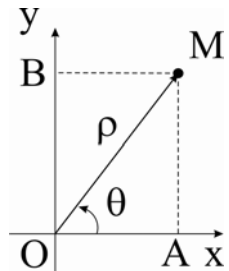
Полярен ъгъл: $\theta = \angle(\vec{OX}, \vec{OM})$

Полярни координати на т. М: $M(\theta, \rho)$

☞ Примери:

$M(\frac{2\pi}{3}, \rho)$	$M(\frac{4\pi}{3}, \rho)$	$M(-\frac{\pi}{6}, \rho)$
		

Връзка на полярните координати с координати от $\triangle OBM$



$$\frac{BM}{OM} = \sin \theta, \text{ т.е. } \frac{y}{\rho} = \sin \theta;$$

$$\frac{OA}{OM} = \cos \theta, \text{ т.е. } \frac{x}{\rho} = \cos \theta.$$

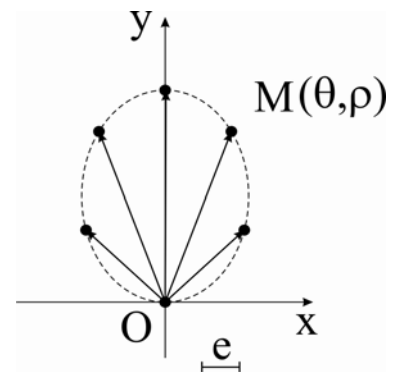
Така доказахме съотношенията:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \theta \\ y = \rho \cdot \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = \rho^2}, \text{ и } \boxed{\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \theta}.$$

2. Криви в полярни координати: $\rho = f(\theta)$.

☞ Пример: $\rho = \sin \theta$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
ρ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$



Дефиниционна област: $\rho \geq 0, \sin \theta \geq 0$.

Въпрос 9: Евклидово пространство \mathcal{R}^n .

1. Понятие за \mathcal{R}^n .

Елемент на \mathcal{R}^n е всяка n -торка реални числа

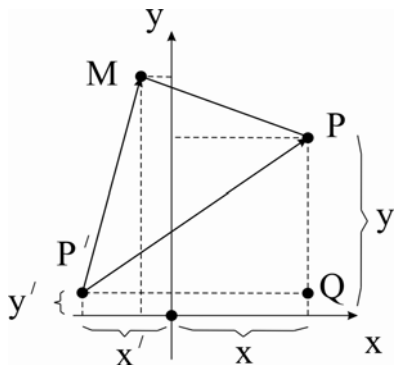
$$\mathcal{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathcal{R}\}.$$

Под вектор в \mathcal{R}^n се разбира $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. За векторите в \mathcal{R}^n могат да се дефинират операциите „сбор на два вектора“ $\vec{x} + \vec{y}$, произведение $\lambda \vec{x}$ на вектор с число, и др.

2. Двумерно евклидово пространство \mathcal{R}^2 .

Нека разгледаме двумерното евклидово пространство и нека $P(x, y)$ и $P'(x', y')$ са две точки (елемента) от него. Под метрично разстояние между две точки в \mathfrak{R}^2 се разбира величината

$$d(P, P') \equiv \left| \vec{PP'} \right| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}, \text{ или още геометрически}$$



$$|QP| = |y' - y|$$

$$|QP'| = |x - x'|$$

По Питагорова теорема:

$$|PP'|^2 = |x - x'|^2 + |y' - y|^2, \text{ т.е.}$$

$$d(P, P') \equiv \left| \vec{PP'} \right| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

В сила е следната аксиома: $d(P, P') \leq d(P, M) + d(M, P')$.

Някои подмножества на \mathfrak{R}^2 и начини за тяхното символично означаване:

а) отворен кръг $K_r(M_0)$ с център т. M_0 и радиус r :

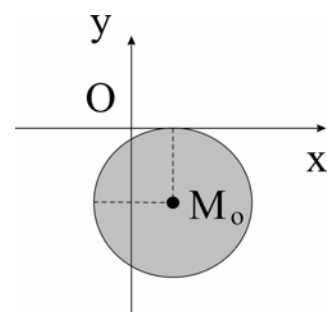
$$\Leftrightarrow K_r(M_0) = \{ P(x, y) \mid d(P, M_0) < r \};$$

б) затворен кръг $\bar{K}_r(M_0)$ с център т. M_0 и радиус r :

$$\Leftrightarrow \bar{K}_r(M_0) = \{ P(x, y) \mid d(P, M_0) \leq r \}, \text{ или още}$$

$$\bar{K}_r(M_0) = \{ (x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2 \}.$$

Пример 1:
$$\left\{ (x, y) \mid (x - \frac{1}{2})^2 + (y + 1)^2 \leq 1 \right\} = \left\{ (x, y) \mid x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + 2y + 1 \leq 1 \right\}$$

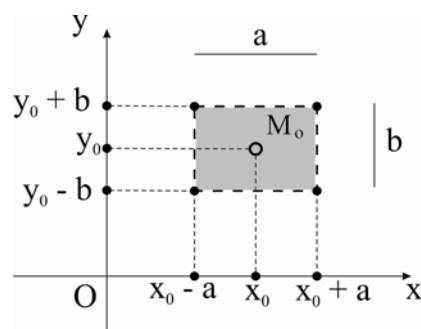


Очевидно геометричният образ на това подмножество на \mathfrak{R}^2 е окръжност

$$C_r(M_0) = \{ (x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \}.$$

в) отворен правоъгълник с център т. $M_0(x_0, y_0)$ и страни $2a, 2b$:

$$P(M_0, 2a, 2b) = \{ (x, y) \mid |x - x_0| < a \cap |y - y_0| < b \}.$$



Определение: Околност на т. $M_0(x_0, y_0)$ се нарича всеки отворен кръг $K_r(M_0)$ или всеки отворен правоъгълник $P(M_0, 2a, 2b)$ с център т. $M_0(x_0, y_0)$.

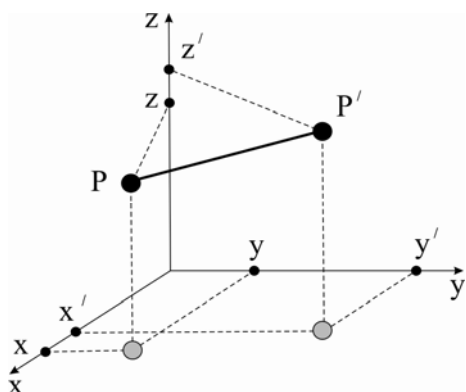
Диаметър: нека $x \in \mathfrak{R}^2$. Тогава $diam x = \sup d(P, P')$, където $P, P' \in x$.

3. Триммерно евклидово пространство \mathfrak{R}^3 .

Елемент на \mathfrak{R}^3 е всяка 3-ка реални числа

$$\mathfrak{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathfrak{R}\}.$$

Нека $P(x, y, z)$ и $P'(x', y', z')$ са две точки (елемента) от \mathfrak{R}^3 . Под **метрично разстояние** между две точки в \mathfrak{R}^3 се разбира величината



$$d(P, P') \equiv \left| \vec{P, P'} \right| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2},$$

или още геометрически (виж фиг.)

$$d(P, P') \equiv \left| \vec{P, P'} \right| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$

Подмножества на \mathfrak{R}^3 :

а) Окръжност (сфера) в \mathfrak{R}^3 :

$$S_r(M_0) = \{M(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 \mid d(M, M_0) = r\}, \text{ или още}$$

$$S_r(M_0) = \{(x, y, z) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2\}.$$

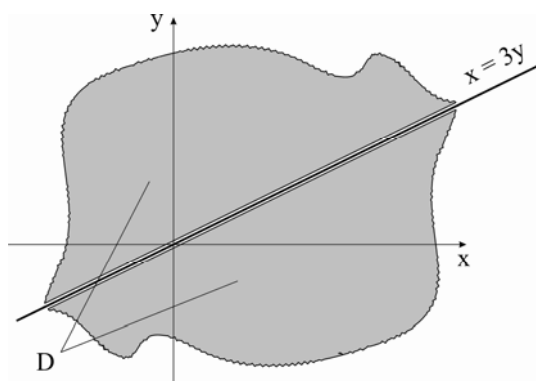
Частен случай: сфера с център т. О $S_r(O) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}.$

Въпрос 10: Функции на няколко променливи

1. Определение: нека с $D \in \mathfrak{R}^2$ е дефиниционна област, и нека f е правило, по което на $\forall (x, y) \in D$ се поставя в съответствие число $z = f(x, y)$. Казваме, че по този начин е дефинирана функция $f(x, y)$ на две независими променливи x и y .

Казаното може да се запише още така:

$$\{(x, y, z) \mid z = f(x, y)\}.$$



☞ **Пример 1:** $z \equiv f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x - 3y},$

където $D = \{(x, y) \mid x \neq 3y\}.$

В случая дефиниционната област D на функцията представлява две отворени полуравнини, „допиращи се по правата с уравнение $x = 3y$.

Ето две функционални стойности на

горната функция на две независими променливи:

$$z = f(3,0) = 3, \text{ и } z = f(4,2) = -6.$$

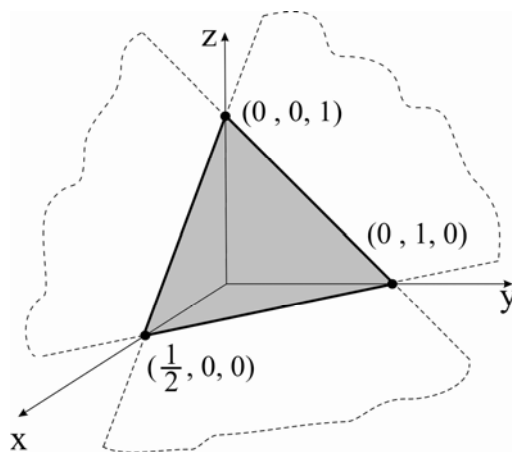
2. Графика на функция на две независими променливи

Нека е дадена функцията $z = f(x, y)$, имаща Д.О. $(x, y) \in D$. Под **графика на функцията** се разбира

$$\Gamma_f = \{ (x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D \}.$$

☞ **Пример 1:** $z = ax + by + c$, и по-конкретно напр. $z = 1 - 2x - y$.

x	0	0	1/2
y	0	1	0
z	1	0	0

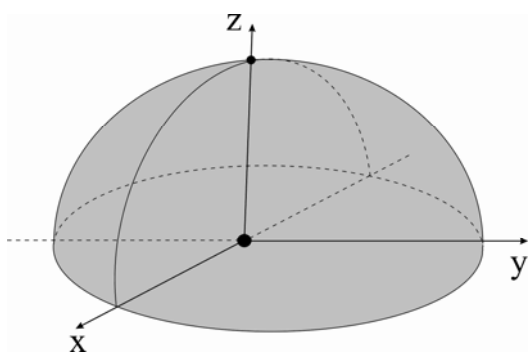


Координатните равнини имат уравнения $x = 0$ (yOz), $y = 0$ (xOz) и $z = 0$ (xOy).

Равнини в специално положение: напр. равнината $x = 3y$, т.е. $3y - x = 0$, е равнина, в уравнението на която „липсва“ z , което означава, че z може да бъде произволно (в частност равно на нула), и следователно това е уравнение на равнина, $\parallel Oz$.

☞ **Пример 2:** функцията $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$,

имаща $D: r^2 - x^2 - y^2 \geq 0$, т.е. $D: r^2 \geq x^2 + y^2$
 $\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq r^2$, което е уравнение на затворен кръг с радиус r .



Графиката Γ_f на тази функция представлява горната полусфера $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$.

☞ **Пример 3:** функцията $z = x^2 + y^2$

Ако графиката Γ_z на тази функция се пресече с равнина $z = z_0$, която е успоредна на равнината xOy , се получава сечение, представляващо окръжност с радиус $r = \sqrt{z_0}$, т.е.

$$\Gamma_z \cap \{ z = z_0 \} = \{ x^2 + y^2 = z_0 \} \text{ или } \Gamma_z \cap \{ z = z_0 \} = \{ x^2 + y^2 = (\sqrt{z_0})^2 \}.$$

Въпрос 11: Частни производни

Нека е дадена функцията $z = f(x, y)$, където точките $(x_0, y_0) \in D_f$.

Определение: Под частна производна по x на функцията $f(x, y)$ в точките $x = x_0$ и $y = y_0$ разбираме величината

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = (f(x, y_0))'_{x=x_0}$$

☞ **Пример 1:** $f(x, y) = \frac{x^3 + y^2}{x - y}$.

Решение: $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = \left(\frac{x^3 + 2^2}{x - 2} \right)' \Big|_{x=1} = \frac{3x^2(x-2) - (x^3 + 4)}{(x-2)^2} \Big|_{x=1} = -8$.

Подробна аргументация:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \neq 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x}$$

По аналогичен начин се дефинира и **частната производна по y** :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = (f(x_0, y))'_{y=y_0} = \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \neq 0}} \frac{f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta y}$$

Възприети са и широко се използват следните означения:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0).$$

За функцията от горния пример частната производна по y е:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^3 + y^2}{x - y} \right) = \frac{2y(x - y) - (-1) \cdot (x^3 + y^2)}{(x - y)^2} = \frac{x^3 - y^2 + 2xy}{(x - y)^2}$$

☞ **Пример 2:** $f(x, y, z) = \arctg \frac{xy}{z^2}$.

Решение: $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{1}{1 + \left(\frac{xy}{z^2}\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{xy}{z^2} \right) = \frac{z^4}{z^4 + x^2 y^2} \cdot xy \cdot \frac{\partial}{\partial z} (z^{-2}) =$
 $= \frac{z^4}{z^4 + x^2 y^2} \cdot xy \cdot (-2)z^{-3} = -\frac{2xyz}{z^4 + x^2 y^2}$.

2. Производни от по-висок ред: ако $f = f(x, y, z)$, то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x} (x, y, z) \right)'_y.$$

По аналогичен начин могат да се дефинират и

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)'_x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)'_z, \text{ и т.н. „смесени“ производни.}$$

Напр. в задачата от горния пример вече определихме $\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{2xyz}{z^4 + x^2 y^2}$,

следователно

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{2xyz}{z^4 + x^2 y^2} \right) = -2yz \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{z^4 + x^2 y^2} \right) = -2yz \frac{1 \cdot (z^4 + x^2 y^2) - x \cdot (y^2 \cdot 2x)}{(z^4 + x^2 y^2)^2} = \\ &= -2yz \frac{z^4 - x^2 y^2}{(z^4 + x^2 y^2)^2}. \end{aligned}$$

За „смесените“ производни важи теорема, съгласно която редът (последователността), в която се прилагат (пресмятат) производните по различните независими променливи на една функция, е **без значение**. По силата на тази теорема имаме напр.:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)'_z \stackrel{T}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)'_x = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \text{ и т.н.,}$$

както и в по-сложно зададени (тройни, четворни и т.н.) смесени производни

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial x} \stackrel{T}{=} \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z} \stackrel{T}{=} \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x^2}, \text{ и т.н.}$$

Могат да се дефинират и многократни („чисти“) производни по една от променливите, напр.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)'_x = f''_{xx}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)'_y = f''_{yy}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)'_z = f''_{zz} \text{ и т.н.}$$

3. Тотален диференциал

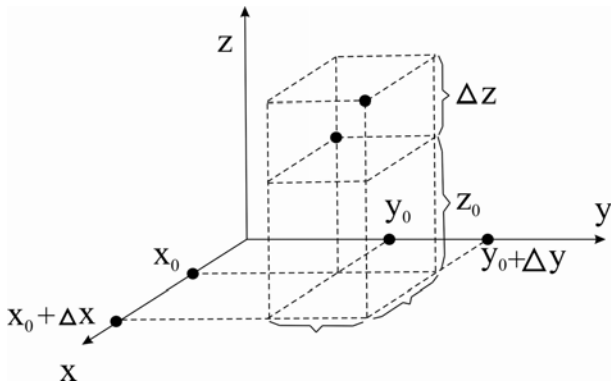
Определение: под тотален диференциал на една функция на две (и повече) променливи) се разбира величината

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y,$$

т.е. пълният диференциал на една функция е сбор от частните ѝ диференциали по отделните променливи, или

$$df(x_0, y_0) = d_x f(x_0, y_0) + d_y f(x_0, y_0),$$

където $d_x f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x$, а $d_y f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y$.



Нарастването на функцията при изменение (нарастване) на аргументите ѝ, е

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Оказва се, че тоталният диференциал $df(x_0, y_0)$ е главната част от нарастването на функцията, и по-конкретно

$$\Delta f = df + o(\Delta x, \Delta y).$$

Частни случаи:

а) ако $f = f(x, y) \equiv x$, то:

$$\left. \begin{array}{l} \text{- от една страна } df = dx, \text{ а} \\ \text{- от друга страна } df = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y = \Delta x \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta x = dx$$

б) аналогично, ако $f = f(x, y) \equiv y$, то:

$$\left. \begin{array}{l} \text{- от една страна } df = dy, \text{ а} \\ \text{- от друга страна } df = 0 \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y = \Delta y \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta y = dy$$

Понеже резултатите от разглежданията в тези два частни случая трябва да останат верни и в общия случай, то очевидно е в сила представянето

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Основни правила за пълния диференциал:

- 1.) $d(const) = 0$,
- 2.) $d(f + g) = df + dg$,
- 3.) $d(a \cdot f) = a \cdot df$,
- 4.) $d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$,
- 5.) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$,
- 6.) $dF[u(x, y)] = F'[u] du(x, y)$

☞ **Пример:** $d \arctg \frac{xy}{z^2} = ?$

В случая имаме $F[u(x, y)]$, където $F \rightarrow \arctg$, а $u(x, y) = \frac{xy}{z^2}$. Следователно по правило (6) ще имаме

$$\begin{aligned}
d \operatorname{arctg} \frac{xy}{z^2} &\equiv d \operatorname{arctg} u(x, y) = F'[u] du(x, y) = \frac{1}{1+u^2} du \equiv \frac{1}{1+\left(\frac{xy}{z^2}\right)^2} d\left(\frac{xy}{z^2}\right) = \\
&= \frac{z^4}{z^4+x^2y^2} d\left(\frac{xy}{z^2}\right) = \dots \text{ (по правило 5) } \dots = \frac{z^4}{z^4+x^2y^2} d \frac{z^2 d(xy) - xy \cdot d(z^2)}{(z^2)^2} = \\
&= \frac{z^4}{z^4+x^2y^2} \frac{z^2(dx \cdot y + x \cdot dy) - xy \cdot (2z \cdot dz)}{z^4} = \frac{yz^2 \cdot dx + x \cdot z^2 \cdot dy - 2xyz \cdot dz}{z^4+x^2y^2} = \\
&= \frac{yz^2}{z^4+x^2y^2} dx + \frac{x \cdot z^2}{z^4+x^2y^2} dy - \frac{2xyz}{z^4+x^2y^2} dz.
\end{aligned}$$

Въпрос 12: Локални екстремуми на функции на две променливи

1. Определение: казваме, че функцията $z = f(x, y)$, където $(x, y) \in D_f$, има:

- ☞ локален максимум в т. $(x_0, y_0) \in D_f$, ако съществува околност U на тази точка (x_0, y_0) , в която е изпълнено $\forall (x, y) \in U \Rightarrow f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, и
- ☞ локален минимум в т. $(x_0, y_0) \in D_f$, ако съществува околност U на тази точка, в която е изпълнено $\forall (x, y) \in U \Rightarrow f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$.

В първия случай (при максимум) върху графиката Γ_f на функцията точката (x_0, y_0) ще бъде връх, а във втория случай (при минимум) точката ще бъде „долина“.

2. Необходимо условие за локални екстремуми (при диференцируеми функции):

Нека в околност на т. $(x_0, y_0) \in D_f$ съществуват частните производни $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ и нека в т. (x_0, y_0) съществува (със сигурност) локален максимум (или минимум). Тогава ще следва, че трябва да бъде в сила условието (НУ)

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Доказателство: нека разгледаме (за определеност) случаят на локален максимум в т. (x_0, y_0) . Нека означим с $\varphi(x)$ функцията $\varphi(x) = f(x, y_0)$. От определението за локален екстремум следва, че когато т. $(x, y_0) \in U$, където U е околност на (x, y_0) , то следователно $\varphi(x) \leq \varphi(x_0)$. Оттук следва че $\varphi(x)$, разглеждана като **функция на една променлива**, има локален максимум в т. x_0 . За такава функция (както следва от курса по **МА-1**) условието за локален максимум в т. x_0 е $\varphi'(x_0) = 0$. Но от начина, по който дефинирахме функцията

$\varphi(x) = f(x, y_0)$ непосредствено се вижда, че всъщност $\varphi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'_x(x_0, y_0) = 0}$, к.т.д.

По напълно аналогичен начин се доказва, че и $\boxed{f'_y(x_0, y_0) = 0}$, с което доказателството на НУ (необходимото условие) е завършено.

3. Достатъчно условие (ДУ) за локални екстремуми (при диференцируеми функции):

Нека в околност \boxed{u} на т. $(x_0, y_0) \in D_f$ функцията $f(x, y)$ има първи и втори частни производни (и по двете променливи), и нека още $\boxed{f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0}$. Точка (x_0, y_0) , за която това е изпълнено, се нарича **стационарна (критична) точка**.

Разглеждаме детерминантата

$$\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2.$$

а) ако $\Delta(x_0, y_0) > 0$, то в т. (x_0, y_0) функцията $f(x, y)$ има **локален екстремум**, който е:

☞ **максимум**, ако $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, (или $f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$), и

☞ **минимум**, ако $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ (или $f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$).

б) ако $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то в т. (x_0, y_0) функцията $f(x, y)$ **не притежава локален екстремум**.

в) а ако $\Delta(x_0, y_0) = 0$, то в т. (x_0, y_0) функцията $f(x, y)$ може да притежава, но може и да не притежава локален екстремум.

Доказателство: ако представим функцията $f(x, y)$ в **ред на Тейлър** в околност на т. (x_0, y_0) , ще имаме

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} [f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)] + \\ + \frac{1}{2!} [f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2] + \dots$$

Нека е дадено, че $\boxed{\Delta(x_0, y_0) > 0}$ и че $\boxed{f''_{xx}(x_0, y_0) < 0}$. Ако прехвърлим $f(x_0, y_0)$ от дясната в лявата страна на горното развитие в ред, ще получим нарастването (изменението) $\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ на функцията. С отчитането и на това, че по условие $\boxed{f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0}$, за Δf получаваме

$$\Delta f = \frac{1}{2!} [f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2] + o(\Delta x, \Delta y)$$

Ще докажем, че дясната страна на горното равенство е **отрицателна величина**. Действително, тя може да бъде представена във вида

$$\Delta f = \frac{(y-y_0)^2}{2!} \left[f''_{xx}(x_0, y_0) \left(\frac{x-x_0}{y-y_0} \right)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0) \left(\frac{x-x_0}{y-y_0} \right) + f''_{yy}(x_0, y_0) \right] + o(\Delta x, \Delta y) =$$

$$= \frac{(y-y_0)^2}{2!} \left[A \left(\frac{x-x_0}{y-y_0} \right)^2 + 2B \left(\frac{x-x_0}{y-y_0} \right) + C \right] + o(\Delta x, \Delta y),$$

в който вид можем да я разглеждаме като съдържаща квадратен тричлен относно $\frac{x-x_0}{y-y_0}$, имащ дискриминанта

$$D = B^2 - A.C = [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 - f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Не е трудно да се види, че дискриминантата D на квадратния тричлен се изразява чрез въведената по-горе детерминанта $\Delta(x, y) = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2$ чрез съотношението $D = -\Delta(x_0, y_0)$.

Но по условие $\Delta(x_0, y_0) > 0$, следователно дискриминантата $D < 0$.

Щом квадратния тричлен $F(x, y) = \left[A \left(\frac{x-x_0}{y-y_0} \right)^2 + 2B \left(\frac{x-x_0}{y-y_0} \right) + C \right]$ има

отрицателна дискриминанта, и коефициентът му $A = f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ (по условие), то този квадратен тричлен приема само отрицателни стойности, т.е. $F(x, y) < 0$ за $\forall (x, y) \in D_f$.

Следователно

$$\Delta f \equiv f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{(y-y_0)^2}{2!} F(x, y) < 0 \text{ за } \forall (x, y) \in D_f,$$

от което веднага следва, че $f(x, y) - f(x_0, y_0) < 0$, т.е. че

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \text{ за } \forall (x, y) \in D_f,$$

а това означава, че действително в точката (x_0, y_0) функцията $f(x, y)$ има максимум (локален или дори глобален), к.т.д.

☞ **Задача 1:** Намерете локалните екстремуми на функцията

$$z(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

Решение: Най-напред следва да определим **стационарните точки** (x_0, y_0) , (x_1, y_1) и т.н. на функцията, а те са точките, за които **едновременно** $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$, т.е.

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = 4 \end{cases}.$$

Ако съберем почленно двете равенства, получаваме $x^2 + 2xy + y^2 = 9$, т.е. $(x+y)^2 = 9$, откъдето $x+y = \pm 3$. По този начин горната система се „разпада“ на следните две системи

$$\left| \begin{array}{l} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{array} \right. \cup \left| \begin{array}{l} x + y = -3 \\ xy = 2 \end{array} \right.$$

Решения на първата система са: $x_1 = 2 \cap y_1 = 1$ и $x_2 = 1 \cap y_2 = 2$.

Решения на втората система са: $x_3 = -2 \cap y_3 = -1$ и $x_4 = -1 \cap y_4 = -2$.

Следователно стационарните точки на тази функция са общо 4, и те са:

$$(2, 1), (1, 2), (-2, -1) \text{ и } (-1, -2).$$

Намираме нужните за екстремумния анализ производни:

$$f''_{xx} \equiv z''_{xx} = (z'_x)'_x = (3x^2 + 3y^2 - 15)'_x = 6x, \text{ т.е. } z''_{xx} = 6x;$$

$$f''_{xy} \equiv z''_{xy} = (z'_x)'_y = (3x^2 + 3y^2 - 15)'_y = 6y, \text{ т.е. } z''_{xy} = 6y;$$

$$f''_{yy} \equiv z''_{yy} = (z'_y)'_y = (6xy - 12)'_y = 6x, \text{ т.е. } z''_{yy} = 6x.$$

Определяме и детерминантата

$$\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36x^2 - 36y^2, \text{ т.е. } \Delta(x, y) = 36(x^2 - y^2).$$

Вече имаме готовност да осъществим самия анализ на екстремумите (ако тя има такива) на функцията $z(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ в намерените по-горе 4 стационарни точки:

а) за точката $(2, 1)$:

$\Delta(2, 1) = 36(2^2 - 1^2) > 0$, т.е. в точката $(2, 1)$ има локален екстремум, като $z''_{xx}(2, 1) = 6 \cdot (2) = 12 > 0$, \Rightarrow този екстремум (съгласно достатъчното условие) е минимум, стойността на който е $z_{\min}(2, 1) = 2^3 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 - 15 \cdot 2 - 12 \cdot 1 = -28$.

б) за точката $(-2, -1)$:

$\Delta(-2, -1) = 36[(-2)^2 - (-1)^2] = 36 \cdot 3 > 0$, т.е. и в точката $(-2, -1)$ функцията има локален екстремум, като $z''_{xx}(-2, -1) = 6 \cdot (-2) = -12 < 0$, \Rightarrow този екстремум (съгласно достатъчното условие) е максимум, стойността на който е $z_{\max}(-2, -1) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2) \cdot (-1)^2 - 15 \cdot (-2) - 12 \cdot (-1) = 28$.

в) за точката $(1, 2)$:

$\Delta(1, 2) = 36(1^2 - 2^2) < 0$, т.е. в точката $(1, 2)$ функцията не притежава локален екстремум (съгласно достатъчното условие).

г) накрая за точката $(-1, -2)$:

$\Delta(-1, -2) = 36[(-1)^2 - (-2)^2] < 0$, т.е. и в точката $(-1, -2)$ функцията не притежава локален екстремум (съгласно достатъчното условие).

Обобщение: в две от общо четирите си стационарни точки $(2, 1)$, $(1, 2)$, $(-2, -1)$ и $(-1, -2)$ функцията има локален екстремум. Това са точката $(2, 1)$ (тук функцията има локален минимум $z_{\min}(2, 1) = -28$) и точката $(-2, -1)$ (тук функцията има локален максимум $z_{\max}(-2, -1) = 28$). В останалите две стационарни (инфлексни) точки $(1, 2)$ и $(-1, -2)$ функцията не притежава локален екстремум.

Въпрос 13: Двоен интеграл

Дефиниция: нека е дадена функция $f(x, y)$ с дефиниционна област $(x, y) \in D_f$. Разглеждаме **разбиване** τ на дефиниционната област на n непресичащи се подобласти

$$\tau: D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n, \text{ като } \mu(D_i \cap D_j) = 0,$$

където с $\mu(D_i)$ е означена мярката (повърхнината) на i -тата подобласт от разбиването τ . **Диаметър** δ_τ на разбиването τ ще наричаме най-големият измежду диаметрите δ_i на отделните подобласти, т.е. $\delta_\tau = \max(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$.

За всяка от подобластите на разбиването избираме по една **произволна точка** $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$.

При крайно разбиване (разбиване с краен брой елементи) Римановата интегрална сума за тази функция ще бъде

$$\sigma_\tau(f, \xi_i, \eta_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \mu(D_i).$$

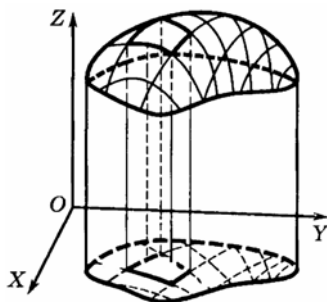
Определение: Казваме, че функцията $f(x, y)$ е **интегруема** в двумерна област $D \in D_f \in \mathbb{R}^2$, ако съществува границата, към която клони сумата $\sigma_\tau(f, \xi_i, \eta_i)$ при неограничено нарастване на броя на елементите на разбиването, когато диаметъра на разбиването δ_τ клони към нула, т.е. ако съществува границата

$$\lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \mu(D_i).$$

Големината на $\sigma_\tau(f, \xi_i, \eta_i)$ при $\delta_\tau \rightarrow 0$, (**ако съществува**), се нарича **двоен интеграл**, и се бележи

$$J = \iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \xi_i, \eta_i) = \lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \mu(D_i).$$

***Допълнение:** геометричен смисъл на двойния интеграл:



Двойният интеграл $J = \iint_D f(x, y) dx dy \equiv \iint_D f(x, y) dS$ е равен

числено на обема V на вертикалното цилиндрично тяло, опиращо се в долната си основа на областта D (областта на интегрирането), а отгоре ограничено от повърхността $z = f(x, y)$, определена за $(x, y) \in D$.

От казаното става ясно, че двойният интеграл притежава следното свойство: ако областта на интегриране D се разбие на две (или повече) непресичащи се подобласти D_1 и D_2 , то в сила е

равенството

$$\iint_D f(x, y) dS = \iint_{D_1} f(x, y) dS + \iint_{D_2} f(x, y) dS.$$

Въпрос 14: Пресмятане на двоен интеграл

Нека най-напред разгледаме интеграционна област D , представляваща правоъгълник $D = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. За двоен интеграл по такава област е в сила следното твърдение:

Ако функцията $f(x, y)$ е интегрируема в D и за $\forall x$ съществува $\int_c^d f(x, y) dy = J(x)$, то съществува и интегралът $\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$, като при това се изпълнява равенството

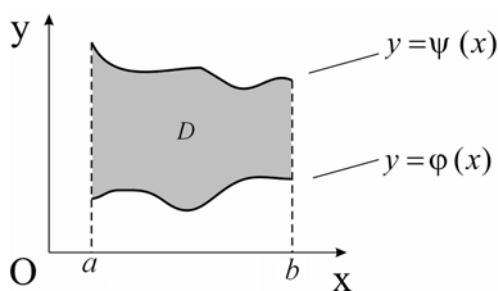
$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Аналогично твърдение се получава, ако се „сменят“ местата на променливите x и y (т.е. $x \leftrightarrow y$):

Ако функцията $f(x, y)$ е интегрируема в D и за $\forall y$ съществува $\int_a^b f(x, y) dx = J(y)$, то съществува и интегралът $\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$, като при това се изпълнява равенството

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Следователно $\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \iint_D f(x, y) dx dy$.



Разглежданията за интеграционна област D , представляваща правоъгълник, могат да се обобщят и за интеграционна област, представляваща **криволинеен трапец с вертикални основи**

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b; \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

където $y_1 = \varphi(x)$ и $y_2 = \psi(x)$ са две непрекъснати функции на x в интервала $[a, b]$.

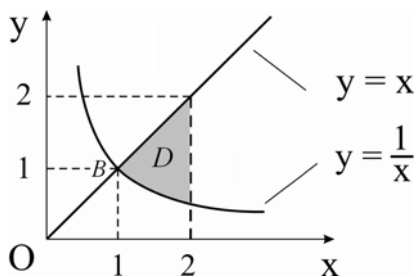
Тогава ако съществува $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$, то съществува и $\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$, като

при това

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

✎ **Задача 1:** да се реши двойния интеграл $J = \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, където интеграционната област D е ограничена от правите $x=2$, $y=x$ и хиперболата

$$x \cdot y = 1 \text{ (т.е. } y = \frac{1}{x} \text{)}.$$



Решение: Пресечната точка B на правата $y=x$ и хиперболата $x \cdot y = 1$ има абсциса $x_B = 1$ и ордината $y_B \equiv y$, която е $y_B = x_B = 1$ (или пък $x_B \cdot y_B = 1$), следователно т. $B(1, 1)$.

Очевидно тази област представлява **криволинеен трапец** с вертикални основи ($x=1$ и $x=2$)

$$D = \left\{ (x, y) : 1 \leq x \leq 2; \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \right\},$$

където $y_1 \equiv \varphi(x) = \frac{1}{x}$, а $y_2 \equiv \psi(x) = x$ са две непрекъснати функции на x в интервала $[1, 2]$.

Тогава за интеграла ще имаме

$$\begin{aligned} J &= \iint_D f(x, y) dx dy = \int_1^2 \left[\int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} dy \right] dx = \int_1^2 \left[x^2 \int_{1/x}^x y^{-2} dy \right] dx = \\ &= \int_1^2 x^2 \left[\frac{y^{-1}}{(-2+1)} \Big|_{1/x}^x \right] dx = - \int_1^2 x^2 \left[x^{-1} - \left(\frac{1}{x} \right)^{-1} \right] dx = - \int_1^2 x^2 \left[\frac{1}{x} - x \right] dx = - \int_1^2 x \cdot dx + \int_1^2 x^3 \cdot dx = \\ &= - \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 + \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = - \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) + \left(\frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} \right) = - \frac{3}{2} + \frac{15}{4} = - \frac{6}{4} + \frac{15}{4} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Въпрос 15: Диференциални уравнения (само с отделящи се променливи)
Общият вид на едно ДУ (диференциално уравнение) от първи ред е

$$(1) \quad F(x, y, y') = 0,$$

или още, ако може да се реши относно производната y' на неизвестната функция $y = y(x)$:

$$(2) \quad y' = f(x, y).$$

Например: $y' = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, или пък $y' = \frac{1}{x}$, имащо решение

$$y(x) = \ln|x| + C.$$

Диференциални уравнения с отделящи се променливи

Общият им вид е

$$(3) \quad y' = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)}.$$

Решение: $\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)} \Rightarrow \psi(y) dy = \varphi(x) dx \quad | \int$

(4) $\int \psi(y) dy = \int \varphi(x) dx + C$.

☞ **Пример 1:** $\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}$.

Решение: Съгласно (4) решението на това ДУ с отделящи се променливи е

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} + C.$$

Решаваме двата интеграла по еднотипен начин (вносяме най-напред интеграционната променлива под съответния диференциал):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y}\sqrt{1-y}} + C \Rightarrow \int \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{1-x}} = \int \frac{y^{\frac{1}{2}} dy}{\sqrt{1-y}} + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} d\left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right) = \int \frac{1}{\sqrt{1-y}} d\left(\frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} d\sqrt{x} = 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-y}} d\sqrt{y} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} dv + C, \text{ където } u = \sqrt{x} \text{ и } v = \sqrt{y}.$$

Двата интеграла са таблични $\int \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \arcsin \xi$, следователно ще имаме

следното решение на диференциалното уравнение:

$$2 \cdot \arcsin \sqrt{x} = 2 \cdot \arcsin \sqrt{y} + C$$

☞ **Пример 2:** $\frac{3 dy}{y^4} - \frac{2 dx}{x^4} = 0$.

Решение: $3 \int y^{-4} dy = 2 \int x^{-4} dx + C' \Rightarrow 3 \frac{y^{-3}}{(-3)} = 2 \frac{x^{-3}}{(-3)} + C' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{3}{y^3} = \frac{2}{x^3} + (-3)C' \Rightarrow \frac{2}{x^3} - \frac{3}{y^3} = 3C' \equiv C \Rightarrow \frac{2y^3 - 3x^3}{x^3 y^3} = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y^3 - 3x^3 = Cx^3 y^3, \text{ което е крайното решение на диференциалното уравнение.}$$

☞ **Пример 3:** $y' = \ln y'$.

Решение: $y' = e^y$, т.е. $\frac{dy}{dx} = e^y \Rightarrow \frac{dy}{e^{-y}} = dx$, или още

$e^y dy = dx \Rightarrow \int e^y dy = \int dx + C \Rightarrow e^y = x + C$ което е крайното решение на диференциалното уравнение.